

チェレンコフラディエーション

宮本道子

Prof. J. Jelly の“チェレンコフラディエーションとその応用”という書物の第一章と第二章をまとめてみました。

近年の高エネルギー核物理学の広範囲でスピーディーな発展は新しい型のラディエーション検出器の研究に大きな刺激を与えた。しかしこのために又、光増幅器の出現のために、チェレンコフラディエーションという主題は学術的な興味の対称としてのみ残された感がある。チェレンコフラディエーションの発達は、シンチレーション計数管の発達に密接に随行している。双方とも、その簡単さと感度の良さに著しいものがあるが、チェレンコフラディエーション計数管の多才さと正確さは持ち合わせていないけれども、その独特さは、高エネルギーの器機物理学と宇宙線研究の分野に極端に有意な発達をもたらした。

§1 チェレンコフラディエーションの現象的意味

1.1 歴史

強い放射線源の近所に、透明な物質からの青白い光の大変弱い放射がその起源の理解に先立って、放射線の分野における多くの研究者によって観察された。キュリー夫人（1941年）の生涯を読んだことのある人は、どのようにして彼女が不思議な白っぽい空色に光っている凝縮されたラジウム溶液のびんを見つけたかという記事を思い出すであろう。

放射線におけるもっとも意味のある発見の先取権は、疑いもなくこの冷光の原因と性質の研究を取り消した。これは1910年のことで、フランクとタムがこのラディエーションの原因に対する正しい説明を与える24年も前のことであった。チェレンコフラディエーションの初期の観察は、光の電磁波理論がよく打ち立てられた時期と時を同じくしてなされ、光学と冷光の研究は物理学の分野の特色をなした。このように、原理的には、その効果の理論的研究はこのチェレンコフラディエーションそのものの研究の何年も前にあらわれた。現象の研究の遅れにはいろいろの原因がある。例えば、これら初期の観察時において、紫外線、X線、又は放射線要素からの新しく発見された放射によって輝かされている物質の蛍光についての系統的な研究が多くなされつつあったがしかし、これら冷光の型に関する異なった、相対的に複雑な現象は、チェレンコフラディエーションの発見を後まわしにただけである。このラディエーションは如何なる場合にも大変弱いので、他の効果によってたびたび隠匿された。それにもかかわらず、チェレンコフラディエーションについての仕事が決定的に発展させられたのは、蛍光と隣光の研究をとうし

てである。実際に感度の良い検波器がなかったことが、チェレンコフラディエーションの発見を遅らせた原因でもある。初期の仕事は、肉眼で実際に観察することと、写真記録によること等によってなされた。

最初のこの現象を研究するための企ては、Mallet (1926, 1928, 1929) によってなされたが、しかしその仕事は不当にも忘れられ、無視された。彼は、放射光源に近く位置する幅広い変化に富む、透明な物体から放射される光はいつも同じ青白い性質のものであり、スペクトルは連続で、蛍光の特質である線又は帯の構造を持たないということを発見した。彼はまず第一にその効果の一般法則を知ろうとした。そして、他の多くの関連ある事柄の中に、それは蛍光や他の知られた冷光の型とはちがっていることに気が付いた。不運なことに Mallet は仕事を続けることが出来ず、又光の原因に対する説明をも与えることが出来なかった。この課題は、チェレンコフが徹底的な実験の連続を始めた1934年まで静かに眠っていた。チェレンコフはこの実験を1938年まで続けたが、これらの実験はその簡単さにおいて非常に顕著であり、彼等の実験結果と、その間1937年にフランクとタムによって与えられた理論とは、卓越した一致を示した。チェレンコフは以前の Mallet の仕事に気付かなかったように見えるが、彼も又偶然に、冷光の研究によってその問題に出合った。彼の実験は Mallet の実験よりも広範囲にわたっていた。次の寄与は Ginsburg によるものであり、彼は1940年に現象の量子論を編み出した。以後この現象はチェレンコフラディエーションとして知られるようになった。

戦争のためにこの分野の研究は墮落したが、しかし同時に光増幅器の発達をもたらした。1944年に Curran と Baker に最初の型の近代的シンチレーション計数管の考案を許したのもこの光検波器の発達であった。

チェレンコフ効果による単一粒子の検出に対して光増幅器や単純な光学系を用いる提案が Getting (1947年) によってなされた。この方法で宇宙線の検出をするという Dike (1947年) による企てや、光感度ガイガー計数管による小さな効果を観察した Weisz と Anderson (1947年) の失敗ののち、蒸留水と光増幅器を用いて、高能率で単独高速荷電粒子の検出を第一に行ったのは Jelly (1951年) であった。これにつづいて、ほとんどすぐに Mather と Marshall (1951年) は高エネルギー加速器からのビームの中の粒子の速度の直接の測定に用いられたチェレンコフ検出器の解説を出版した。

理論的側において、チェレンコフ効果に関する局所的分極によって創り出された密な媒体の中での高速粒子による特殊イオン化によって創り出されたチェレンコフ効果への興味がフェルミとその共同研究者達によって示された (1940年)。

チェレンコフラディエーションはマイクロ波の可能な源として、Ginsburg (1947年) によって示され、他の物理学的過程との関連が広く議論された。他の研究された問題は、等方性媒体や、強磁性体中のチェレンコフラディエーションの研究や量子論によって導入された修正を含む。

1.2 チェレンコフ効果の記述的説明

電子が比較的小さな速度でガラス片又は他の透明な媒体の中を動いているものとして。

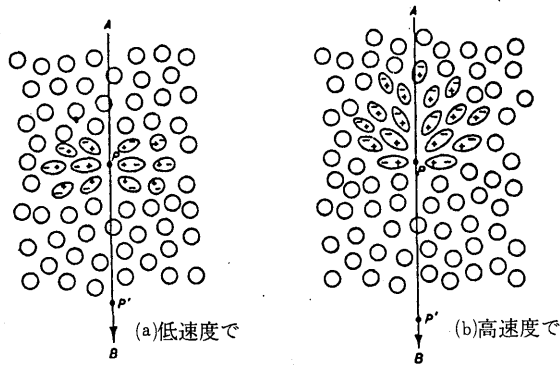


Fig. 1.1 荷電粒子の通過によって誘電体の中に起された分極

Fig. 1.1(a)は電子の軌道 AB の付近でのガラスの断面を示し、円周はガラスを構成している個々の原子をあらわしている。普通はこれらはあらっぽくいて球状をしており、ゆがめられていない。しかし走っている電子に近い領域で、すなわちある特定の瞬間において、例えば P 点で走っている電子の電場は原子をゆがめ、その結果原子を構成している電子の負電荷は原子の原子核の正電荷の一方の側に退けられる。媒体はこのように点 P のまわりで極性を与えられるようになる。さて走っている電子が動いて他の点 P' に動いたとき、 P のまわりで長くなっていた原子はそれらの正常の型にもどる。原子がゆがめられていた間、それらは素粒子双極子のようにふるまっていた。もし走っている粒子が負の電荷を持った電子であれば、陰極が軌道の遠い側を指し、陽電子や陽子ならばその逆である。このように媒体中を電子が通過するとき、軌道にそったガラスの基本的領域はしだいに非常に短時間のパルスを受ける。電子をとりまく分極場の完全な対称性のために、遠距離では合成場がなく、それ故ラディエーションも存在しない。この場合、軸にそった方向も、軸とある角度を持った方向に対しても対称性がある (Fig. 1.1(a))。しかしもし電子が高速で動いているならば、すなわち媒体の中を光の速さと比較しうる速さで動いているならば、図は全く異なってくる (Fig. 1.1(b))。この場合分極場はもはや完全に対称ではない。軸とある角度を持った平面においては、対称性は保存されている。しかし軸方向には合成双極子場があり、これは電子の軌道から遠いところでさえも存在することがあきらかである。このような場は、しだいに軌道にそった基本的要素において電子によって一瞬起され、それぞれの要素は短時間の電磁的パルスを放射する。ラディエーションはこのパルスのいろいろのフーリエ成分に対応する振動数の帯に広がる。

一般的な場合、軌道のあらゆる部分から放射された小波は破壊的に干渉するので、遠方では合成場の強度はなおゼロである。しかしながら、もし媒体の中で走っている電子から放出された光の位相速度よりも電子の速度の方が速ければ、軌道のあらゆる点からの小波が他の小波とともに位相の中にあることが可能になり、その結果観察点では合成場があることになる。Fig. 1.2 に示されたホイヘンスの作図から理解出来ることは、このラディエーションは粒子の軌跡と θ の角をなす方向にのみ観察され、軌道 AB 上の任意の点 P_1, P_2, P_3 からの小波がそこでなす角は首尾一貫しており、波面 BC を形成するように結合される。この首尾一貫性 (コ

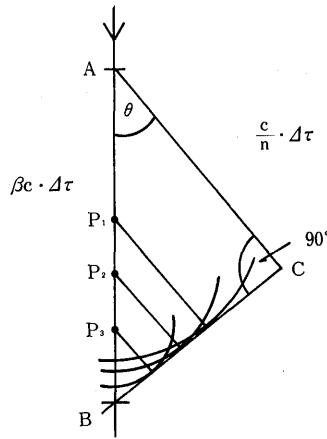


Fig. 1.2 コヒーレンス説明のためのホイヘンスの作図

ヒーレンス) は電子が A から B まで走る時間が光が A から C まで走る時間に等しいときにあられる。 c を真空中での光の速度, n を媒体の屈折率とすると、もし電子の速度が \overline{BC} ならば, $\Delta\tau$ 秒の間に電子は $\overline{AB} = \overline{BC} \cdot \Delta\tau$ 進み, 光は $\overline{AC} = \Delta\tau \cdot \left(\frac{c}{n}\right)$ だけ進む。これから, 我々は次のチェレンコフ放射として知られる関係式を得る

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n} \quad (1.1)$$

(1.1) 式から次の事柄がわかる,

- (i)与えられた屈折率 n の媒体に対して $\beta_{\min} = \frac{1}{n}$ という速度のしきい値が得られ, この速度以下ではラディエーションは起らない。この臨界速度において, ラディエーションの方向は電子のそれと一致する。
- (ii)超相対論的粒子に対して $\beta = 1$ あり, これは最大放射角を与え, $\theta_{\max} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ となる。
- (iii)ラディエーションは可視光又は可視光に近いスペクトル領域で起り, そのとき $n > 1$ である。X線領域の放射は $n < 1$ なので不可能であり, (1.1) は満されない。

1.3 チェレンコフの独想的な実験

1934年にチェレンコフは γ 線の影響のもとにある純粋な液体からの大変弱い可視的なラディエーションに注目した。

彼の最初の実験で, Fig. 1.3 に示される大変簡単な装置を用いた。104 mg のラジウムの入った小ビンが木片 B 中の R_1 の位置に差し込まれ, そしてその木片の中には A の位置に白金のるつぼが置かれている。コリメーター L , 反射プリズム P , そして望遠鏡 L_1L_2 によって構成されている光学系によって, E で源近くの液体の中の弱い輝きを観察することが出来る。絞り D , そしてその他の光学系の構成要素は, 相対的な強度を測る目盛の付いたくさび形の板 W , スペクトル解析のためのフィルター F , そしてラディエーションの偏りを研究するために用いるニコルのプリズム N である。暗やみに順応している眼で, チェレンコフは蒸留水, パラフィン, キシレン, トルエン, グリセリンと種々のアルコール等の16の液体からの光の相対的な強度を測定することが出来た。この最初の彼の観察から得られた結論は, 相対的な強度

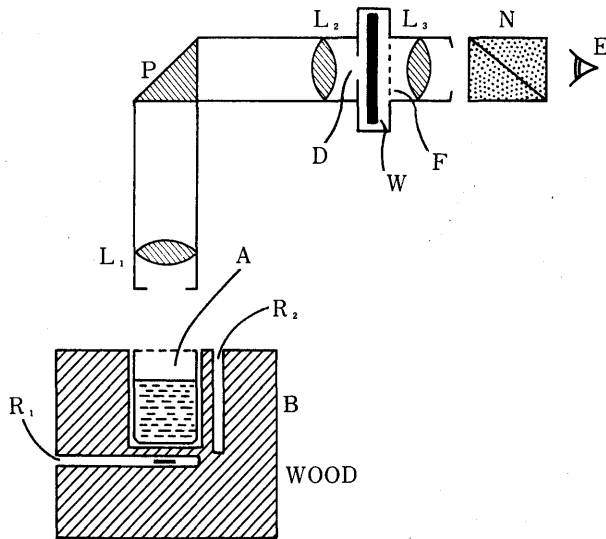


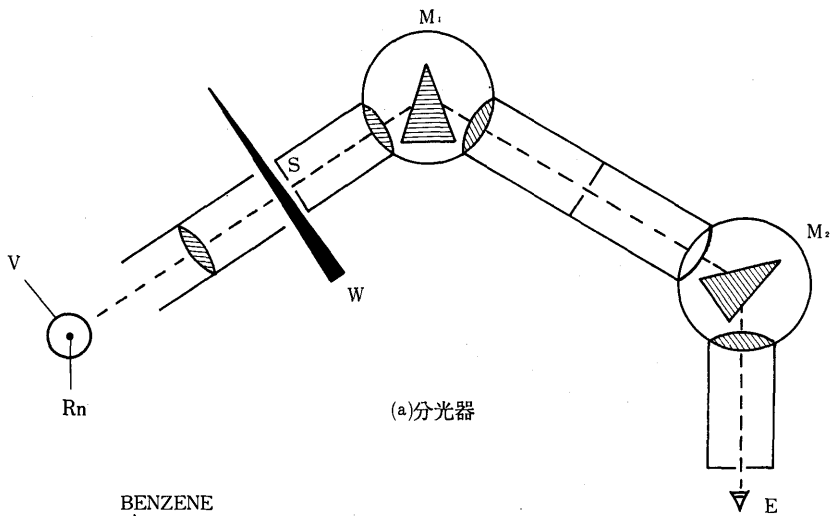
Fig. 1.3 チェレンコフが最初の実験に用いた光学系 (1934)

の変動は比較的小さいということである。すなわち、スペクトル分布はある液体のものと、他の液体のものとは、ほとんど変わらないということ、光は青とすみれ色の間に集中している。その上、蛍光の場合の強い消滅を与える行為者として知られている硝酸銀、ヨウ化カリウム等の化合物を加えることによって、光の消滅は起こらない。さらに蛍光とはちがって、温度の変化はラディエーションの強度になんの変化も与えない。

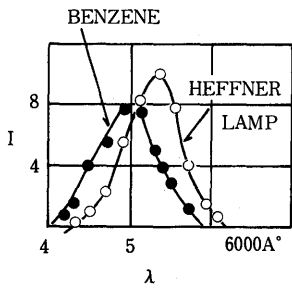
これら最初の実験のすぐ後に、Vavilio (1934年)はこのラディエーションは媒体の中での電子が速度を落すことによる効果、すなわち制動放射であろうといったが、このアイディアは困難であり、支持しがたいことが判明した。

1938年にチェレンコフはフランクとタムの理論を証明するという目的を持った実験を行った。(i)ラディエーションのスペクトルが Fig. 1.4(a)に示されている実験装置によって研究された。100mcの小さなガラスびんの中のラドン源からの β 線は薄いガラス容器Vの中のベンゼンを輝かすために用いられる。Vのイメージは光のシャワーの中での M_1 と M_2 の単色計の中の最初のスリットSに集められる。光はEで目で観察され、色のついたくさびWは4300~6000Åの範囲での波長のラディエーションの相対的強度の測定をする。ラドン源によって前に占められていた位置に置かれた、マグネシウム酸化物スクリーンを照らしている、標準のHeffnerランプからの光のスペクトルと比較された。Fig. 1.4(b)にHeffnerランプからの光のスペクトル分布と、ベンゼンからのラディエーションのスペクトル分布の2つの分布 $E(\lambda)$ が記されている。Fig. 1.4(c)で $E(\lambda)$ が $\frac{1}{\lambda^3}$ に対してプロットされているが、このことは実験と理論の卓越した一致を示している。

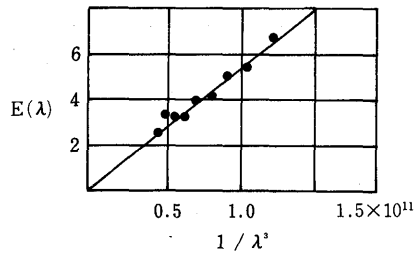
(ii)ラディエーションの決定的な強度が Fig. 1.5に示されている装置によって測定された。ラドンアンプルの中に密封されている150mcのラドン源は、水を満した小さな球状の容器Vに配置されている。Vは源からの強烈な γ 放射から観察者を守る鉛の塊から切り抜かれた球状



(a)分光器



(b)Heffner ランプからのものと比較された、
観察された強度分布



(c) $\frac{1}{\lambda^3}$ の函数としてプロット
された強度函数 $E(\lambda)$

Fig. 1.4 ラディエーションのスペクトル分布を決定するためのチェレンコフの実験 (1938 a)

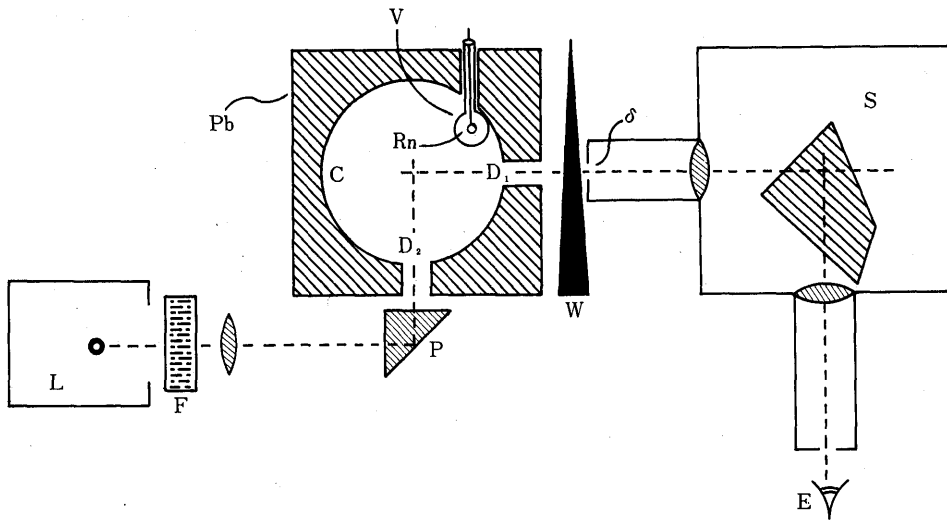


Fig. 1.5 ラディエーションの決定的な強度を測定するために
チェレンコフによって用いられた装置 (1938 b)

のくぼみ C を構成している表面の近くにある。水からのチェレンコフラディエーションは C の中で一様であると仮定し、孔 D_1 から出て来るが、定量偏差分光計 S によって E で目で観察される。スリット幅 δ の適当な選択によって、波長 $5360\text{--}5560\text{\AA}$ の帯が観察され、水銀スペクトルでのグリーン線の波長 5460\AA が中央になっている。くさび W はプリズム P を通って孔 D_2 からくぼみの中に入ってくる水銀ランプ L からの光の強度を測って比較する。確実な光の強度は C の内側で孔 D_2 の上に置かれている熱電対によって測定されるが、液体のフィルター F はグリーン以外のすべての光を吸収する。熱電対は Heffner ランプから順々に目盛られる。この実験から決定的な光の強度は、ラドンに対して 4.1×10^{-4} エルグ/秒/mc であることが示されたが、一方同じ条件のもとでフランクとタムの理論から計算された値は 3.5×10^{-4} エルグ/秒/mc であった。この一致は比べるべきもの多数の中でも著しいものであった。

(iii) θ の n と β への依存性。この初期の実験のシリーズを終えるにあたって、チェレンコフは Fig. 1.6 の写真技術を用いた。彼はラジウムと ThC'' からの γ 線を用いて、測微写真計の線か

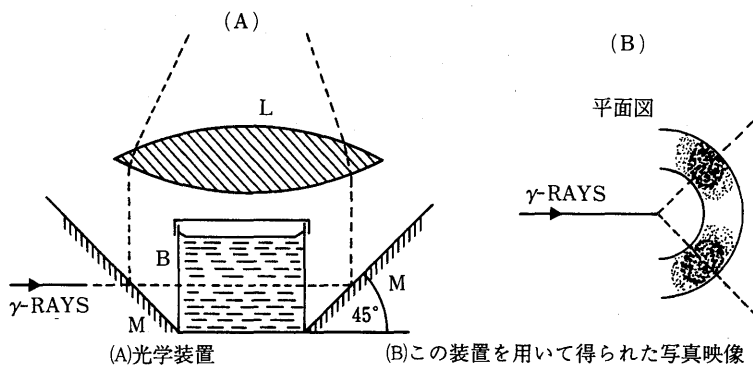


Fig. 1.6 写真記録を用いたチェレンコフの光学装置 (1937)

ら角 θ を計った。この結果は Fig. 1.7 に示されている。2つの γ 線源のエネルギーとコンプトン散乱過程の Klein-Nishina の理論から得られるエネルギー分布とは満足に一致している。

§2 チェレンコフラディエーションの理論的研究

2.1 フランクとタムの古典的理論

誘電性の媒体の中を一様な速度で動く電子のラディエーションについての問題に対する、彼等の独想的な取り扱いにおいて、フランクとタムは簡単のために次のような仮定をした (1937年)。

- (i) 媒体は連続体であると考え、顕微鏡的構造は無視する。誘電率 ϵ は媒体のふるまいを記述する唯一の媒介変数である。
- (ii) 分散は無視する。
- (iii) ラディエーションの反作用は無視する。
- (iv) 媒体は完全に等方的誘電体であると仮定され、その結果導電率はゼロで、導磁率 $\mu = 1$ で、ラディエーションの吸収はないものとする。

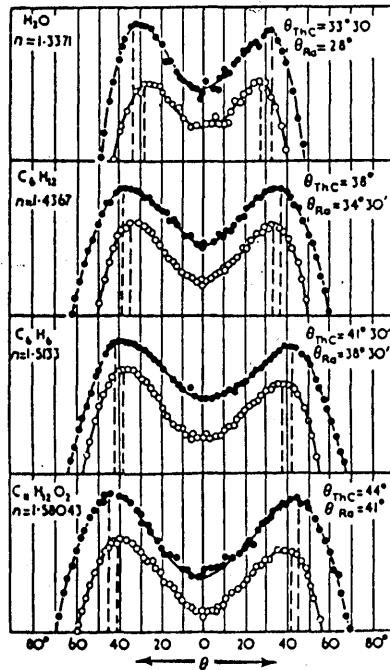


Fig. 1.7 異なる2つの源からの γ 線に対する観測 (1938c)

(v)電子は一定の速度で走ると仮定する。すなわち、イオン化や多重クーロン散乱による減速は無視する。

(vi)媒体は境界がなく、軌道の長さは無限であるものとする。

フランクとタムに従って、上の仮定とともに、我々は次のように進めてゆこう。

分極 \mathbf{P} と電気の強度 \mathbf{E} との間の力学的関係を次のように取る

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \sum_s \omega_s^2 \mathbf{P}_s = \alpha \mathbf{E} \quad (2.1)$$

ここで ω_s は媒体の分子振動の振動数であり、 $\alpha = Ne^2/m$ である (N は、電荷 e 、質量 m の単位体積中の電子の数である)。

\mathbf{E} と \mathbf{P} はすべての場の変数をフーリエシリーズで展開することによって得られ、次の型をしている、

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega e^{i\omega t} d\omega \quad \mathbf{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_\omega e^{i\omega t} d\omega, \text{ etc.} \quad (2.2)$$

\mathbf{P}_ω と \mathbf{E}_ω に次の関係を導入することが必要である、

$$\mathbf{P}_\omega = (n^2 - 1) \mathbf{E}_\omega \quad (2.3a)$$

ここで n は振動数 ω での屈折率である、

$$\mathbf{D}_\omega = n^2 \mathbf{E} \quad (2.3b)$$

媒体でのマックスウェルの方程式はそこで、

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_w = 0 \quad (2.4a)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{H}_w = \frac{1}{c} \left(4\pi \mathbf{j}_w + \frac{\partial \mathbf{D}_w}{\partial t} \right) \quad (2.5a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_w = 4\pi\rho \quad (2.6a)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{E}_w = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_w}{\partial t} \quad (2.7a)$$

ここで c は自由空間における光の速度であり, \mathbf{j} は電流密度であり, ρ は自由電荷の密度である。

これらの方程式をベクトルポテンシャル \mathbf{A} とスカラーポテンシャル ϕ の関数として書き直すと,

$$\mathbf{H}_w = \operatorname{curl} \mathbf{A}_w \quad (2.4b)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_w + \frac{w^2 n^2}{c^2} \mathbf{A}_w = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_w \quad (2.5b)$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{w^2 n^2}{c^2} \phi_w = -\frac{4\pi}{n^2} \rho \quad (2.6b)$$

$$\mathbf{E}_w = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_w}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi_w \quad (2.7b)$$

ここで我々は次のベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの間の関係を利用する,

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_w + \frac{iw}{c} n^2 \phi_w = 0$$

もし荷電 e の電子が一定の速度 v で z 軸にそって媒体の中を動くならば, 対応する電流密度 \mathbf{j} は次のようになる,

$$j_z = ev \delta(x) \delta(y) \delta(z-vt)$$

ここで δ はディラックの関数をあらわす。 j_x と j_y 成分は両方ともゼロである。 j_z を展開して次の式を得る

$$j_z(w) = \frac{e}{2\pi} e^{-iwx/v} \delta(x) \delta(y)$$

又は, 円筒座標 ρ , ϕ , z を用いて, 次の式を導入する

$$j_z(w) = \frac{e}{4\pi^2 \rho} e^{-iwx/v} \delta(\rho)$$

この表現を (2.5b) に代入して,

$$A_r = A_\theta = 0 \quad A_z(w) = u(\rho) e^{-i w z / v} \quad (2.8)$$

とすると、我々は次の方程式を得る

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + s^2 u = \frac{e}{\pi c \rho} \delta(\rho) \quad (2.9)$$

ここで、

$$s^2 = \frac{w^2}{v^2} (\beta^2 n^2 - 1) = -\sigma^2 \quad (2.10)$$

このように u は $\rho \neq 0$ でベッセルの方程式を満足する円筒函数である。すなわち

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + s^2 u = 0 \quad (2.11)$$

$\rho = 0$ での u を求めるために、(2.9) の右辺を次の f でおきかえる

$$f = -\frac{2e}{\pi c \rho_0} (\rho < \rho_0), \quad f = 0 (\rho > \rho_0)$$

そこで (2.9) を半径 ρ_0 の円盤の表面について積分し、最後に $\rho \rightarrow 0$ の極限を取る。この方法で我々は次の式を得る

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{e}{\pi c} \quad (2.12)$$

さて我々は2つの異なる場合を考えよう。低い速度で動いている電子、すなわち $\beta n < 1$ のような速さで。この場合、 $s^2 < 0$ で $\sigma^2 > 0$ である。(2.12) を満足し、無限大でゼロになる(2.11)の解は、

$$u = \frac{ie}{2c} H_0^{(1)}(i\sigma\rho) \quad (2.13)$$

である。 $H_0^{(1)}$ は第一種のハンケル函数である。もし、 $\sigma\rho \gg 1$ ならば、我々は漸近値 $H_0^{(1)}$ を用いて (2.8) と (2.13) に従って次の解を得る

$$A_z = \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\sigma\rho + iw\left(t - \frac{z}{v}\right)\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma\rho} dw \quad (2.14)$$

このように小さな速度の場合に、電子の場は ρ とともに指数函数的に減少し、その結果電子の軌道から遠く離れた点では、ラディエーションは観測されない。

速度が大きい場合、すなわち $\beta n > 1$ に対して、(2.10) のパラメーター s は実で、(2.9) と (2.11) の一般解は無窮大で円筒波をあらわす。特にこの場合、 u が外側へ伝わってゆく波をあらわし、内側へ入ってくる波をあらわすのではないものとする、我々は (2.12) を満足する次のような微分方程式 (2.11) の解を得る

$$u = -\frac{ie}{2c} H_0^{(2)}(s\rho), \quad w > 0 \quad (2.15)$$

$s\rho \gg 1$ に対して $H_0^{(2)}$ という漸近値を用いて (2.8) と (2.15) から $w > 0$ に対して

$$A_z(w) = -\frac{e}{c\sqrt{2\pi s\rho}} \exp\left[iw\left(t - \frac{z}{v} \right) - i\left(s\rho - \frac{3}{4}\pi \right) \right]$$

を得る。(2.10) を用いてこの関係を次のように書くことが出来る

$$A_z(w) = -\frac{e}{c\sqrt{2\pi s\rho}} \exp\left[iw\left(t - \frac{z \cos \theta + \rho \sin \theta}{\frac{c}{n}} \right) + \frac{3}{4}\pi i \right]$$

ここで、 θ はコヒーレンスの関係式 $\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$ によって定義される。

このようにもし $\beta n > 1$ ならば、波は θ の方向にそって無限大に伝わり、波の電氣的ベクトルは (z, ρ) のつくる子午線の平面に存在する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} H_\theta &= -\frac{a}{\sqrt{\rho}} \int \sqrt{s} \cos \chi \, dw \\ H_\rho &= -\frac{a}{c\sqrt{\rho}} \int \frac{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}}{\beta^2 n^2 \sqrt{s}} \cos \chi \cdot w \, dw \\ E_z &= \frac{a}{c\sqrt{\rho}} \int \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \frac{1}{\sqrt{s}} \cos \chi \cdot w \, dw \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

ここで、 $a = \frac{e}{c} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 、 $\chi = w \left[t - \frac{z \cos \theta + \rho \sin \theta}{\frac{c}{n}} \right] + \frac{\pi}{4}$

(2.16) の積分は $\beta n(w) \gg 1$ である w の値についてのみなされる。その軸が電子の軌道と一致する長さ l の円筒の表面をとらして、電子によってラディエートされる全エネルギーは、

$$W = 2\pi\rho l \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \, dt$$

である。ここで、 $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(wt + \alpha) \cos(w't + \beta) \, dt = \pi \delta(w - w')$ という関係式を用いて、次のラディエーション生成に対する基本的な式に到達する

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{c^2} \int_{\beta n > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) w \, dw \quad (2.17)$$

この式には振動数カットオフがなされていないので、(2.17) によるラディエーション生成は無有限になる。しかしながら、特にラディエーションの上限を決める2つのファクターがあり、これらはラディエーションを有限にする。

2.2 ラディエーション生成の式 (2.17) についての吟味

ラディエーションを有限にする第一のファクターは、実際の媒体はいつも分散しており、その結果ラディエーションは $n(w) > \frac{1}{\beta}$ に対する振動数の帯に限定されているということである。全体の電磁的スペクトルにわたる、透明な媒体の分散カーブの一般的な型は Fig. 2.1 に示されており、数種のガラスに対する分散カーブは Fig. 2.2 における可視領域に示されている。

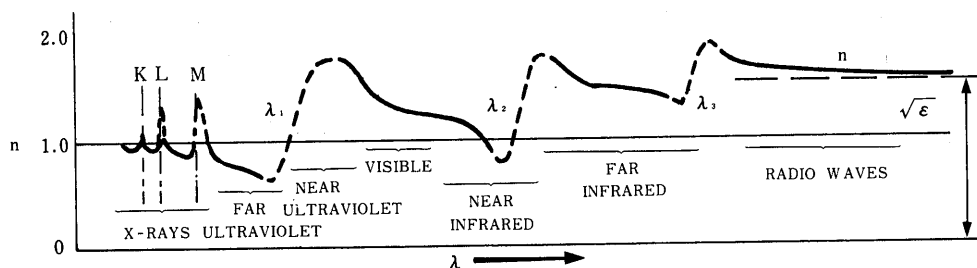


Fig. 2.1 全体の電磁的スペクトルにわたる透明媒体の分散カーブ

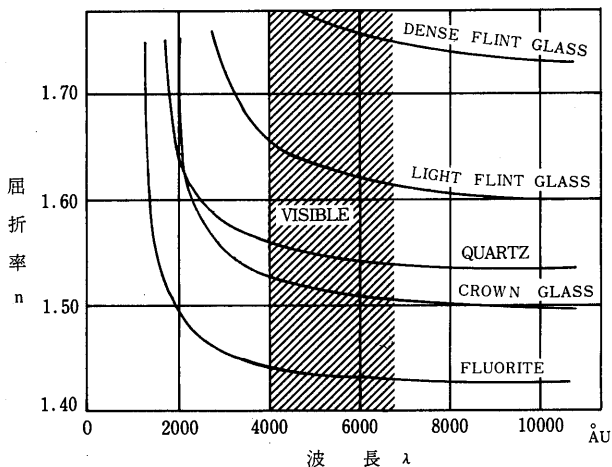


Fig.2.2 数種のガラスの分散カーブ

(2.17) のスペクトルに限界を与える第2の要素は、電子の微細長さである。コヒーレント条件を満たすために、電子のラディエーションは電子の古典的直径 d よりも大きい波長に限定されている。もし我々が (2.17) を $w=0$ から、 $w = \frac{c}{nd}$ すなわち、 $\lambda = \infty$ から $\frac{\lambda}{2\pi} = d$ まで積分すると次のようになる。

$$\frac{dW}{dl} = \frac{e^2}{2n^2 d^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \quad (2.18)$$

$\lambda_{\min} = 2\pi d$ なので $\frac{dw}{d\lambda} \propto \frac{1}{\lambda^3}$ となることから、(2.18) を $n\lambda_{\min}$ で微分してみるとわかるが、これは、Fig. 1.4(c)の比例関係に対応する。

2.3 量子論によって導入された修正

Ginsburg は1940年、磁気能率を持たないと仮定して、荷電 e を持つ電子からのラディエーション生成に対する次の表現をシュレーディンガーの方程式を用いて得た

$$\frac{dW}{dl} = \frac{e^2}{c^2} \int_{\beta n > 1} \left\{ 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \left[1 + \frac{n^4}{4} \left(\frac{\hbar w}{mc^2} \right)^2 + n^2 \left(\frac{\hbar w}{mc^2} \right) \right] \right\} w dw \quad (2.19)$$

厳密に言えば、(2.19) 式は非相対論に対してのみ有効である。又、Ginsburg は運動の軸によって分極していると仮定して、磁気能率 μ_0 を持つ非相対論的電子のラディエーションについて考えた。得られた結果は、第一項は荷電からのもので、(2.19) に一致し、第二項は磁気能

率 μ_0 から生ずる項で、次の型をしている

$$\left(\frac{dW}{dl} \right)_{\mu_0} = \frac{\mu_0^2}{\beta^2 c^4} \int n^2(\omega) \omega^2 \left\{ 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \times \left[1 + \frac{n^2}{4} \left(\frac{\hbar \omega}{mc^2} \right)^2 + n^2 \left(\frac{\hbar \omega}{mc^2} \right) \right] \right\} d\omega \quad (2.20)$$

Ginsburg は最後に磁氣的超相對論的電子の場合におけるラディエーションの生成の式を導くために、ディラックの電子論を用いた。そして、非常に高いエネルギーでは、磁氣的ラディエーションは存在しないという結果を導いた。すなわち、 $\beta \rightarrow 1$ のとき $\left(\frac{dW}{dl} \right)_{\mu_0} \rightarrow 0$ になるという理論である。

原稿受理1985年12月2日