アルバート・アインシュタインの特殊相対論

宮　本　道　子

第Ⅰ部

アインシュタインの論文“Zur Electrodynamik bewegter Körper”（Annalen der Physik 17, 1905）の英訳“On The Electrodynamics Of Moving Bodies”をまとめてみました。

序　節

マックスウェルの電気力学が運動する物体に応用されたときに，従来の現象にあらわれなかった非対称性があらわれることが知られている。例えば，相互に入れ換え可能な磁石と導線の電気的作用をとってみよう。観察する現象はここでは，導線と磁石の相対的な作用にのみよっているが，このことから考えると，どちらかが運動している２つの場合に明確な区別を慣例の見解が示している。もし磁石が運動していて導線が静止しているときには，導線の部分部分が位置している場所に電流を生ずる有限のエネルギーを持つ電場が磁石の近傍にあらわれる。しかしもし，磁石が静止しており，導線が運動している場合には，磁石の近傍に電場はあらわれない。しかしながら，導線の内部に起電力を見出すが，この起電力に対応するエネルギーは導線の内部にはなく，２つの場合の同等性を仮定すれば，前の場合の電力によってつくられるのと同様な道筋と強度の電流を生ずる。

この種の例は，“光の媒質”に対して相対的な地球上の運動を発見する如何なる企ても，失敗に終っているということと合わせて，電気力の現象はその機構と同様に，絶対静止の概念に対する特性を所有していないということを暗示し，第一次の微少量に対してすでに示されたように，同じ電気力学と光学の法則が，機構の方程式が正しく保たれるすべての準拠座標系に対して有効であることを示している。我々はこの推測（こののち“相対性原理”と呼ばれる特性）を公理にまでたかめ，そして又この推測とは明らかに相容れない他の仮定を導入する。すなわち，物体放射の運動状態とは関係なく，光は常に真空を有限の速度cで伝播するという仮定である。これら２つの仮定は静止している物体に対するマックスウェルの理論にもとづく，運動する物体の電気力学の簡単で矛盾のない理論の達成に十分である。“光の媒質エーテル”の導入は，ここで発展される見地によって無用のものであることが証明され，特質を与える“絶対的静止空間”を要求しないばかりか，電磁過程があらわれる真空の点に対して速度ベクトルを指定しない。

発展されるべき理論は，すべての電気力学のように剛体の運動学にもとづいて発展させられるべきである。なぜなら，すべてのこのような理論の主張は，剛体座標系，時計，そして電磁

過程の間の関係でなされねばならないからである。この状況の考察の不十分さは運動物体の電気力学が現在出合っている困難の底に横たわっている。

I　運動学

§a　同時性の定義

ニュートン力学の方程式が正しい座標系を取ろう。表現をより正確にするために，そして言葉上このの
ち導入する他の座標系と区別するために，この座標を“静止系”と呼ぶ。

もし質点がこの座標系に相対的に静止しているならば，この位置は相対的に定められ，さらに精密な一般的な測定法とユークリッド幾何学によって，カーテシアン座標で表現されうる。

もし質点の運動を記述したいと思うならば，我々はその座標の値を時間の関数として与える。さて，我々は“時間”という言葉によって理解されていることに関してはっきりしていなければ，この種のことの数学的記述は物理的な意味を持たないことに心を留めなければならない。時間が役割を演じているすべての我々の判断が，いつも同時に起る出来事の判定であることを考慮に入れなければならない。もし例えば，私が“汽車が7時にここに到着する”というならば，私は，“私の時計が7という点をさすことと，汽車の到着が同時に起る出来事である”ということを意味している。

“時間”の定義に“私の腕時計の位置”を代入していることから生ずるすべての困難に打ち勝つことが可能であるかのようにみえる。事実，時計が位置している場所に対して独占的に時間を決めることに関心を持つとき，そのような定義は満足しうるものである。しかし，我々が異なる場所で起る出来事の時間の連続と関連づけねばならないとき，もはや満足なものではない。すなわち，時計から離れた場所で起こる出来事の時間を値づける場合にもはや満足なものではなくなる。

我々はもちろん，座標の原点に時計とともに位置している観察者によって決定され，時間づけられるべきそれぞれの出来事によって発せられ，真空をとうして彼に到着する光の信号によって腕の位置に対応して座標づけられた時間の値で満足する。しかし，この座標づけは我々が経験から知っている腕時計や柱時計とともにある観測者の位置に独立ではないという不利益を持っている。そこで我々は次のような考え方の線にそって，より実際的な決定に到達する。

もし空間の A 点に時計があり，A 点での観察者は，A への即刻の接近において出来事 S と同時刻である腕時計の位置を見出すことによって，出来事 S の時刻を決定する。もし空間の B 点に A 点にある時計とあらゆる点で同じである時計があるとすれば，B での観察者が B への即刻の近傍における出来事 S の時刻の値を決定することは可能である。しかしより以上の仮定なしで，A での出来事と B での出来事を時間に関して比較することは不可能である。これまでに，“A 時間”と“B 時間”のみを決定してきたが，A と B に対して共通な時間を決定してはいない。この共通な時間に対しては，A から B へ行く光の時間が B から A へ行く光の時間に等しいという定義を確立することなしには決定することが出来ない。光が“A 時間”t_A に A から B に向って出発し，“B 時間”t_B に B から A に反射され，そして“A 時間”t_A' に A に

到着するものとしよう。２つの時計が同じ時間を示すという定義に従って

$$t_B - t_A = t_A' - t_B$$

この同時刻の定義に矛盾がないものとしよう。そして如何なる数の点に対しても可能であるものとし，それ故，次の関係は普遍的に有効であるものとする。

1．B の時計が A の時計と同時刻を示すならば，A の時計は B の時計と同時刻を示す。

2．もし A の時計が B と C の時計と同時刻を示すならば，B と C の時計はそれぞれ同時刻を示す。

このように仮想の物理実験の助けによって，異なる場所に置かれた同時刻を示す静止した時計によって理解されることを決定し，“時間”の“同時性”と“同時刻”ということの明確な決定をした。出来事の“時刻”は出来事の場所に置かれた静止した時計によって同時刻に与えられるが，この時計はもちろん同時刻を示しているし，あらゆる時刻の決定に対して，特別に静止した時計と同時刻を示す。

実験との一致において，我々は次の量を仮定する

$$\frac{2AB}{t_A' - t_A} = c$$

これは普遍的な定数であり，真空での光の速度である。

静止系において，静止した時計によって定義された時刻を決定することは本質的であり，我々が“静止系の時刻”と呼ぶ静止系にふさわしい時刻が定義された。

§b　長さと時間の相対性

次の考察は相対性原理に基づくものであり，光の速度の定数性に基づくものである。これら２つの原理を我々は次のように定義する。

1．変化を受ける物理系の状態は，これらの状態の変化が一様移動運動における２つの座標系のうちの一つの座標系に関するものであるか，他のもう一つの座標系に関するものであるかどうかはこの法則によって影響されない。

2．光が静止している物体から放射されたか，動いている物体から放射された場合であるかにかかわらず，光は“静止”座標系の中を決定された速さで動く。それ故，

$$速さ = \frac{光の道筋}{時間間隔}$$

ここで時間間隔は§ａで定義されたとうりである。

静止した剛体棒があるものとする。この長さは静止している測定棒によって測られたものである。静止座標系の x 軸にそっている棒の座標軸を考えよう。そして，x が増加する方向への x 軸にそう v という速度での一様な平行移動の運動は棒に伝えられる。さて我々は運動している棒の長さについて研究して，次の操作によって確かめられた長さを考えよう。

1．観測者は与えられた測定棒と一緒に動き，棒が測られる。この場合には，測定棒の上に置くことによって直接棒の長さが測られるので，すべての３点が静止している場合と同様

である。

2．静止している時計を静止系に並べることによって測れるように，§a に応じてこれらを同時刻にしておく。観察者は決められた時刻に，測られるべき棒の両端が静止系のどの点に位置しているかつきとめるであろう。測定棒によって測られたこれら2点間の距離はすでに採用されているが，この場合の静止している2点間の距離は又，“棒の長さ”を指定しうる長さである。

相対性原理に応じて，1という操作によって得られる長さは，“運動系の棒の長さ”と呼ばれるが，静止棒の長さ l に等しいにちがいない。2を作用することによって得られる長さは，“静止系での運動している棒の長さ”と呼ぼう。我々はこれを2つの原理から決定しよう。この長さは l とは異なっているであろう。

しかし，現代の運動学では，暗黙のうちに2つの操作によって決定された長さはまさに等しい。又は他の言葉で言えば，運動している剛体は t という時刻に定められた場所で，静止している同じ物体によって幾何学的に完全に表現される。

棒の2つの端 A と B に静止系の時計と同時刻の時計があり，これらは出来事が起る場所での“静止系の時刻”に対応する時刻を示すので，これらの時計は“静止系で同時刻である。”

我々はさらに，それぞれの時計とともに運動する観察者を考えよう。又，これらの観察者は，2つの時計の同時刻性に対して，§a で打ち立てられた基準を2つの時計に適用するものとしよう。

光が A を時刻 t_A に出発し，時刻 t_B に B で反射され，t_A' に再び A に到着するものとしよう。光の速さの一定常数性を考慮に入れて，次の関係をうる

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c-v},\quad t_A' - t_B = \frac{r_{AB}}{c+v}$$

ここで r_{AB} は運動している棒の静止系での長さである。棒と一緒に動いている観察者は，2つの時計は同時刻ではないといい，静止系での観察者は，時計は同時刻であると主張する。

このように我々は同時刻性の概念の絶対的な意味をつけることが出来ないことを知る。そして，ある座標系で2つの出来事が同時刻であっても，その系に相対的に運動している系から見ると，もはや同時刻の出来事とは見なされない。

§c　静止系から静止系に対して一様に平行移動している他の座標系への空間と時間の変換の理論

“静止”している空間の中に2つの座標系を取ろう。すなわち，一点からでる3本の互いに垂直な直線からなっている2つの座標系である。これら2つの系の X 軸は一致し，Y 軸と Z 軸はそれぞれ平行になっている。それぞれの座標系に測定棒と数個の時計があり，2つの測定棒と，さらに2つの座標系のすべての時計がすべての点で同じようにする。

さて，2つの系の一方を k とし，その原点に対して，もう一方の静止系 K の x が増加する方向に一定速度 v を与え，この速さは座標軸に伝えられ，関連する測定棒と時計にも伝えられるものとする。静止系 K の如何なる時刻に対しても，運動している系の軸の定まった位置が

対応しており，対称性を持つという理由から，k の運動は時刻 t（この“t”はいつも静止系の時刻を表わす）に k の軸が K の軸に平行であると仮定する。

我々は今，空間が静止系の測定棒によって，静止系 K から測られるものと考え，運動している k 系からは一緒に動いている測定棒によって測られるものとする。結果として，x,y,z 軸と ξ，η，ζ 軸を得た。さらに，静止系の時刻 t は§a で示された方法で光の信号によってすべての点にある時計によって決定される。同様に運動する系の時刻 τ は，§a で与えられている方法，すなわち運動している時計が置かれている点の間の光の信号の方法によって，運動している系に対して静止している時計のある，運動している系のすべての点に対して決定される。

静止系での出来事の場所と時間を完全に決定する系の値 x，y，z，t に対して，k 系に相対的な出来事を決定する系の値は ξ，η，ζ，τ である。今，我々の仕事はこれらの量を関係づける方程式を見出すことである。

もし我々が $x'=x-vt$ と置くならば，k 系で静止している点が時間とは独立に x'，y，z という値の系を持つことは明らかである。我々はまず，τ を x'，y，z，t の関数として定義しよう。そのために，τ は§a で与えられた規則に従って同時刻にされた k 系に静止している時計のデータのまとめ以外のなにものでもないことを方程式で表現しなければならない。

k 系の源から光が時刻 τ_0 に X 軸にそって x' に放射され，時刻 τ_1 に座標の源へ反射され，時刻 τ_2 にそこに到達したものとする。我々はそこで，$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$ 又は関数の偏角を挿入して，静止系での光速の一定性を適用すると

$$\frac{1}{2}\left[\ \tau(0,0,0,t)+\tau\left(0,0,0,t+\frac{x'}{c-v}+\frac{x'}{c+v}\right)\ \right]=\tau\left(x',0,0,0,t+\frac{x'}{c-v}\right) \tag{1}$$

$$\tau(x',0,0,T)\Rightarrow\frac{d\tau}{dx'}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{\partial\tau}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x'}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\tau}{\partial\left(t+\frac{x'}{c-v}+\frac{x'}{c+v}\right)}\frac{\partial\left(t+\frac{x'}{c-v}+\frac{x'}{c+v}\right)}{\partial x'}\right]$$

$$=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{\partial\tau}{\partial\left(t+\frac{x'}{c-v}\right)}\frac{\partial\left(t+\frac{x'}{c-v}\right)}{\partial x'}$$

となり，それ故もし x' が無限に小さく取られると

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-v}+\frac{1}{c+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{1}{c-v}\frac{\partial\tau}{\partial t} \tag{2}$$

となる。又は，

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0 \tag{3}$$

となる。

座標の原点の代わりに他の点を光源の点に選んだ。このようにして得られた方程式は，x'，y，z のすべての値に対して有効である。

類似の考察を——Y と Z 軸に適用すると——光が常に静止系から見ると，これらの軸にそって速さ$\sqrt{c^2-v^2}$で伝播することを心に留めて，

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial\tau}{\partial z}=0 \tag{4}$$

となり，τ が線型関数なので，これらの方程式から

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}=-\frac{v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=k$$

故に，$\tau_1=kx' \qquad \tau_2=-k\dfrac{c^2-v^2}{v}t$

$$\tau=\tau_1+\tau_2=kx'-k\frac{c^2-v^2}{v}t$$

$$=-k\frac{c^2-v^2}{v}\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right)$$

$a=-k\dfrac{c^2-v^2}{v}$ ととると，

$$\tau=a\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right) \tag{5}$$

となる。ここで a は関数 $\phi(v)$ で，今は未知であり，ここでは簡単のために $t=0$ のときに k の原点が $\tau=0$ であるものと仮定する。

この結果の助けによって，運動する系で測定されたとき，光は又速度 c で伝播するということを方程式で表現することによって（相対性原理との関連において，光の速さの一定性の原理によって要求されるように），我々は ξ，η，ζ という量を簡単に決定する。$\tau=0$ に ξ の増加する方向に放射された光線に対して，

$$\xi=c\tau \text{ 又は } \xi=ac\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right)$$

であるが，しかし光は静止系で測定するとき，$c-v$ という速度で k の発端に相対的に運動する。その結果，

$$\frac{x'}{c-v}=t \tag{6}$$

もしこの値を ξ に対する方程式に代入すると

$$\xi=a\frac{c^2}{c^2-v^2}x' \tag{7}$$

となり，同様の方法で他の２つの軸にそって動く光線を考えると，

$$\frac{y}{\sqrt{c^2-v^2}}=t \qquad x'=0 \tag{8}$$

のとき，

$$\eta = c\tau = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right)$$

であり，ζ 方向に対しても同様であるから

$$\eta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}y,\quad \zeta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}z \tag{9}$$

となる。

x' にこれらの値を代入すると，

$$\begin{aligned} \tau &= \phi(v)\,\beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ \xi &= \phi(v)\,\beta\,(x - vt) \\ \eta &= \phi(v)y \\ \zeta &= \phi(v)z \end{aligned} \tag{10}$$

ここで，

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

である。運動している系の原点としてゼロ点に関してなんの仮定もなされないならば，これら方程式の右側にさらに定数が加えられるべきである。

光の速度の定数性の原理と相対性原理が両立することを証明していないので，静止系の場合にこの光の定数性を仮定すれば，運動する系で測定された光線が速度 c で伝播することを証明しなければならない。

$t = \tau = 0$ 時刻に 2 つの系の原点が一致しているときに，ここから球面波が放射され，K 系で速度 c で伝播するものとする。もし $(x,\ y,\ z)$ がこの波の到達する点であるとすれば，

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{11}$$

という関係を満たす。

この方程式を k 系に変換すると，簡単な計算によって，

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2\tau^2 \tag{12}$$

を得る。

考えている波は運動している系で見ると，伝播速度 c で伝播している球面波にほかならない。このことは我々の 2 つの基本原理が両立することを示している。

ここで展開された変換の方程式の中には v についての未知の関数 ϕ が入っているが，この ϕ を決定しよう。

この目的のために第 3 の座標 K' を導入しよう。この系は X 軸に平行に平行移動をしている

状態にあり，k 系の原点が X 軸上を $-v$ の速さで運動している。$t=0$ 時刻に3つのすべての原点が一致するものとし，$t=x=y=z=0$ のときに K' 系の t' がゼロであるものとする。K' 系で測られた座標を x'，y'，z' と呼ぶものとし，2重変換によって

$$t' = \phi(-v)\,\beta(-v)\left(\tau + \frac{v\xi}{c^2}\right) = \phi(v)\,\phi(-v)t$$
$$x' = \phi(-v)\,\beta(-v)(\xi + v\tau) = \phi(v)\,\phi(-v)x$$
$$y' = \phi(-v)\,\eta = \phi(v)\,\phi(-v)y$$
$$z' = \phi(-v)\,\zeta = \phi(v)\,\phi(-v)z$$

となり，x'，y'，z' と x，y，z の間の関係は t を含まず，K と K' は互いに静止しているので，K の K' に対する変換は1でなければならないことはあきらかであろう。このように

$$\phi(v)\,\phi(-v) = 1$$

さて，$\phi(v)$ の意味を考えてみよう。$\xi=0$，$\eta=0$，$\zeta=0$ と $\xi=0$，$\eta=l$，$\zeta=0$ の間の k 系の Y 軸の部分について注意をはらってみよう。この Y 軸の部分は K 系に対して相対的に v の速さでその軸に垂直に運動している。その端は K 座標系で

$$\begin{cases} x_1 = vt, \quad y_1 = \dfrac{l}{\phi(v)}, \quad z_1 = 0 \\ x_2 = vt \quad y_2 = 0 \quad\quad, \quad z_2 = 0 \end{cases}$$

である。それ故 K 系で測られる棒の長さは $\dfrac{l}{\phi(v)}$ であり，そしてこのことは我々に $\phi(v)$ の意味を知らせてくれる。対称であるという理由から，その軸に垂直に運動している棒の長さは静止系で測ると，運動の方向によるのではなくて，その速度の大きさのみによることが明らかである。静止系で測られた運動する棒の長さは変わらないので，もし v と $-v$ が入れ換わっても変わらないので

$$\frac{l}{\phi(v)} = \frac{l}{\phi(-v)} \text{ 又は } \phi(v) = \phi(-v)$$

となる。この関係と $\phi(v)\,\phi(-v)=1$ という関係から $\phi(v)=1$ であることがわかり，その結果発見した変換の方程式は次のようになる

$$\begin{aligned} \tau &= \beta\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ \xi &= \beta(x - vt) \\ \eta &= y \\ \zeta &= z \end{aligned} \tag{13}$$

ここで，

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

である。

§d　運動する剛体棒と，運動している時計について得た方程式の物理学的意味

半径 R の剛体表面を考察しよう。この剛体表面は k 系に対して相対的に静止しているものとし，その中心が k 系の原点にあるものとする。速度 v で K 系に対して相対的に動いている球の表面の方程式は

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=R^2 \tag{14}$$

である。この表面の方程式は $t=0$ で x，y，z で次のように書かれる

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}+y^2+z^2=R^2 \tag{15}$$

静止しているときには球形であったが，運動している状態では，軸 $R\sqrt{1-\frac{v^2}{c}}$，R，R の回転による楕円体となる。

このように球の Y と Z の長さは運動によって変わらないのに（それ故，すべての剛体棒はどんな型をしていようとも），X の長さは $1:\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ に縮められる。すなわち，速度 v が大きければ大きいほどより短かくされる。$v=c$ ですべての運動する物体は静止系から見ると平らな型に縮んでしまう。速度が光の速さよりも大きくなると，我々の議論は無意味になる。しかしながら，我々の理論の中で役割を演ずる光の速さは物理学的に無限に大きい速さであるものとする。

一様に運動している系から見た結果は静止系に静止している物体と同じ結果を保つことはあきらかである。

さらに，我々は静止系に対して静止している時に時刻 t を示すとみなされる時計の一つを考え，運動している系に対して時刻 τ をその時計が示すものとすると，その時計が k 系の原点にあるときには，時刻 τ にあわされる。では，静止系から見たときにはこの時計は何時をさしているでしょうか。

時計の位置に関する量 x，t，τ の間に

$$x=vt,\quad \tau=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)$$

という関係があることは明らかである。それ故，$\tau=t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=t-\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)t$ となることから，$1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 秒だけ1秒間に遅れることがわかる。

$$1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{1}{8}\frac{v^2}{c^4}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\cdots \tag{16}$$

なので，4乗とそれ以上の冪の項を無視すると，$\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}t$ だけ遅れている。

このことから次の特殊な結果が続いて起る。もし K の A と B の点で，静止系から見て静止している時計があれば，これらは同時刻である。そしてもし A にある時計が v という速度で

A と B を結ぶ線にそって B へ運動すれば，その到着時においてもはや 2 つの時計は同時刻を示していないばかりか,A から B に動いた時計は B に残っていた時計よりも $\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}t$ 秒だけ遅れている。ここで t は A から B へ運動するのにかかった時間である。

もしこの時計が多角形の線にそって A から B へ運動し，A と B が一致する場合にもこの結果は明らかに同時に正しいことがわかる。

もし我々が多角形の線に対して証明された結果を仮定するならば，これは連続的に曲った線に対しても有効であり，我々は次のような結果に到達する。もし A 点での 2 つの同時刻の時計の一つが A にもどってくるまで，一定の速度で閉じられた曲線の中を運動するならば，運動は t 秒間つづくものとすると,A 点での運動してきた時計の時刻は $\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}t$ 秒遅れていることになる。さらに又，我々は赤道にある標準時計は極地にある同一の状態の同様な時計よりも少量だけ遅れていることを結論できる。

§e　速度の構成

K 系の X 軸にそって v の速さで運動している k 系において，次の方程式に調和するように点が運動するようにしよう。

$$\xi = w_\xi \tau \quad \eta = w_\eta \tau \quad \zeta = 0 \tag{17}$$

ここで w_ξ と w_η は常数を表わすものとする。

K 系に対して相対的な点の運動は，§c の(13)式

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag*{(13)$_1$}$$

$$\xi = \beta(x - vt) \tag*{(13)$_2$}$$

$$\eta = y \tag*{(13)$_3$}$$

$$\zeta = z \tag*{(13)$_4$}$$

ここで

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag*{(13)$_5$}$$

であるが，この(13)式の助けによって(17)式に x，y，z，t を導入すると次の(18)，(19)，(20)式を得る。

(13)$_2$より $x = \frac{\xi}{\beta} + vt$，(17)を代入して $x = \frac{w_\xi \tau}{\beta} + vt$，(13)$_1$より $x = \frac{w_\xi \beta}{\beta}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) + vt$。故に

$$\left(1 + \frac{v}{c^2}w_\xi\right)x = (w_\xi + v)t$$

そして

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{c^2}}t \tag{18}$$

(13)$_3$，(17)，(13)$_1$，(13)$_5$及び(18)式より

$$y=\eta=w_\eta\tau=w_\eta\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)=w_\eta\beta\left(t-\frac{v}{c^2}\frac{w_\xi+v}{1+\frac{v}{c^2}w_\xi}t\right)$$

$$=w_\eta\beta t\frac{1+\frac{v}{c^2}w_\xi-\frac{v}{c^2}w_\xi-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v}{c^2}w_\xi}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c^2}w_\xi}w_\eta t$$

故に,

$$y=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c^2}w_\xi}w_\eta t \tag{19}$$

(13)$_4$と(17)式より

$$z=0 \tag{20}$$

このように速度の平行四辺形の法則は我々の理論によれば，第一次近似に対してのみ有効である。次のように取ろう

$$V^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{21}$$

$$w^2=w_\xi{}^2+w_\eta{}^2 \tag{22}$$

$$a=\tan^{-1}\frac{w_y}{w_x} \tag{23}$$

a が v と w の間の角であることと

$$\frac{dx}{dt}=\frac{w_\xi+v}{1+\frac{vw_\xi}{c^2}} \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vw_\xi}{c^2}}w_\eta$$

であることと，(22)式によって

$$V=\frac{\sqrt{w_\xi{}^2+v^2+2w_\xi v+w_\eta{}^2-\frac{v^2}{c^2}w_\eta{}^2}}{1+\frac{vw_\xi}{c^2}}=\frac{\sqrt{w^2\cos^2a+v^2+2wv\cos a+w^2\sin^2a-\frac{v^2}{c^2}w^2\sin^2a}}{1+\frac{vw}{c^2}\cos a}$$

$$=\frac{\sqrt{w^2+v^2+2wv\cos a-\frac{v^2}{c^2}w^2\sin^2a}}{1+\frac{vw}{c^2}\cos a} \tag{24}$$

を得る。v と w が対称にこの表現に入っていることは注目に値する。もし w が X 軸の方向を持つとすれば，$\cos a=1$，$\sin a=0$ となるので，

$$V=\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}} \tag{25}$$

を得る。この(25)式より，c より小さい2つの速度の合成によって常に c より小さい速度を得る

ことがわかる。もし我々が$v=c-\kappa$，$w=c-\lambda$として，κとλを正に取り，cより小さいとすると

$$V=\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}=\frac{(c-\kappa)+(c-\lambda)}{1+\frac{(c-\kappa)(c-\lambda)}{c^2}}=c\frac{2c-\kappa-\lambda}{2c-\kappa-\lambda+\frac{\kappa\lambda}{c}}<c$$

さらに，光の速度cは速度の合成によって，それ以外の速度に変えることは出来ない。

$$V=\frac{c+w}{1+\frac{w}{c}}=c\frac{c+w}{c+w}=c$$

§3と矛盾しないようにvとwが同じ方向を持つ場合に2つの速度の合成によって，Vの公式を得た。§3で現われたK系とk系に加えて，k系に平行に運動している他のk'系を導入し，その原点がもしwという速度でX軸上を運動するならば，我々はx，y，z，tという量と§3の方程式のvのところに

$$\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}$$

を代入したk'の量に対する方程式を得る。このことから，このような平行変換が群をつくることがわかる。

我々は，2つの原理に対応する運動学の理論の必須の法則を導いたが続いて，電気力学へのこれらの応用を示そう。

Ⅱ　電気力学

§f　真空に対するマックスウェル・ヘルツの方程式の変換　作用に対応し磁場の中に起された起電力の性質

真空でマックスウェル・ヘルツの方程式が静止系Kに対して正しく保たれているとしよう。その結果

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t}&=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z} & \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t}&=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\\
\frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t}&=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x} & \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t}&=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\\
\frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t}&=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y} & \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t}&=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}
\end{aligned}\tag{26}$$

であり，$(X,\ Y,\ Z)$は電力ベクトルを表わし，$(L,\ M,\ N)$は磁力ベクトルを表わすものとする。

もし我々がこれらの方程式にここで導入された速度vで運動している座標系に対する電磁過程に関して，§3で展開された次の変換

$$\tau=\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \qquad (13)_1 \Rightarrow t=\beta\left(\tau+\frac{v}{c^2}\xi\right)$$

$$\xi=\beta(x-vt) \qquad (13)_2 \Rightarrow x=\beta(v\tau+\xi)$$

$$\eta=y \qquad (13)_3 \Rightarrow y=\eta$$

$$\zeta=z \qquad (13)_4 \Rightarrow z=\zeta$$

を適用するならば，我々は次の(27)～(32)の方程式を得る。

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial \tau}=\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau}=\frac{\beta}{c}\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{\beta v}{c}\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\beta}{c}\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{\beta v}{c}\left(-\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

$$\left(\because\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0\right)$$

$$=\beta\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)-\frac{\beta v}{c}\left(\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)\right\}$$

$$\therefore\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)\right\} \tag{27}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}=\frac{\beta}{c}\frac{\partial Y}{\partial \tau}-\beta\frac{v}{c}\frac{\partial Y}{\partial \xi}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial \zeta}-\frac{\partial N}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial \zeta}+\beta\frac{v}{c^2}\frac{\partial N}{\partial \tau}-\beta\frac{\partial N}{\partial \xi}$$

$$\therefore\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\right\}=\frac{\partial L}{\partial \zeta}-\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)\right\} \tag{28}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}=\frac{\beta}{c}\frac{\partial Z}{\partial \tau}-\frac{\beta v}{c}\frac{\partial Z}{\partial \xi}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{\beta v}{c^2}\frac{\partial M}{\partial \tau}+\beta\frac{\partial M}{\partial \xi}-\frac{\partial L}{\partial \eta}$$

$$\therefore\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\right\}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)\right\}-\frac{\partial L}{\partial \eta} \tag{29}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial \tau}=\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau}=\frac{\beta}{c}\frac{\partial L}{\partial t}+\beta\frac{v}{c}\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\beta}{c}\frac{\partial L}{\partial t}+\beta\frac{v}{c}\left(-\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$\left(\because\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0\right)$$

$$=\frac{\beta}{c}\frac{\partial L}{\partial t}+\beta\frac{v}{c}\left(-\frac{\partial M}{\partial \eta}-\frac{\partial N}{\partial \zeta}\right)=\beta\left(\frac{\partial Y}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)-\frac{v\beta}{c}\left(\frac{\partial M}{\partial \eta}+\frac{\partial N}{\partial \zeta}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\right\}$$

$$\therefore\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\right\} \tag{30}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}=\frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial \tau}\beta+\frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial \xi}(-v\beta)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial \zeta}=-\frac{v}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial \tau}+\beta\frac{\partial Z}{\partial \xi}-\frac{\partial X}{\partial \zeta}$$

$$\therefore \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left|\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)\right|=\frac{\partial}{\partial \xi}\left|\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\right|-\frac{\partial X}{\partial \zeta} \tag{31}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}=\frac{\beta}{c}\frac{\partial N}{\partial \tau}-\frac{\beta v}{c}\frac{\partial N}{\partial \xi}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\beta v}{c^2}\frac{\partial Y}{\partial \tau}-\beta\frac{\partial Y}{\partial \xi}$$

$$\therefore \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left|\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)\right|=\frac{\partial X}{\partial \eta}-\frac{\partial}{\partial \xi}\left|\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\right| \tag{32}$$

ここで

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

である。

さて相対性原理は，もしK系において真空に対するマックスウェル・ヘルツの方程式が成立するならば，k系においても成立することを要求する。すなわち，k系での電力と磁力のベクトル（X'，Y'，Z'）と（L'，M'，N'）は電気と磁気の質量について考えられる効果によって定められた次の方程式を満足する。

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X'}{\partial \tau}=\frac{\partial N'}{\partial \eta}-\frac{\partial M'}{\partial \zeta}\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau}=\frac{\partial Y'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Y'}{\partial \tau}=\frac{\partial L'}{\partial \zeta}-\frac{\partial N'}{\partial \xi}\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau}=\frac{\partial Z'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \zeta}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Z'}{\partial \tau}=\frac{\partial M'}{\partial \xi}-\frac{\partial L'}{\partial \eta}\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial \tau}=\frac{\partial X'}{\partial \eta}-\frac{\partial Y'}{\partial \xi}$$

k系に対して見出された方程式は，２つの系であきらかに同じものであるはずである。なぜなら，両系の方程式は，K系に対するマックスウェル・ヘルツの方程式に等しいからである。さらに，ベクトルの記号の例外を除いて，２つの系の方程式は一致するので，対応する場所での系の方程式に生起する関数は$\Psi(v)$という要素を除いて一致する。すなわち$\Psi(v)$というのは，ξ，η，ζ，τについては独立であり，vに従属している。このように我々は次の関係式を得る

$$X'=\Psi(v)X \qquad L'=\Psi(v)L$$

$$Y'=\Psi(v)\,\beta\left(Y-\frac{v}{c}\boldsymbol{N}\right)\qquad M'=\Psi(v)\,\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)$$

$$Z' = \Psi(v)\,\beta\,(Z + \frac{v}{c}M) \quad N' = \Psi(v)\,\beta\,(N - \frac{v}{c}Y)$$

さて，我々は交換可能な系の方程式を作ろう。まず今得た方程式を解いて，そして次に$-v$によって特徴づけられる逆変換に対する方程式を適用する（すなわちk系からK系への）。このようにして得られた2つの系の方程式が同じであることを考えて，$\Psi(v)\Psi(-v)=1$になる。さらに，対称性から$\Psi(v)=\Psi(-v)$。そしてさらに$\Psi(v)=1$になるので，方程式は次の型になる

$$X' = X \qquad L' = L$$

$$Y' = \beta\,(Y - \frac{v}{c}N) \qquad M' = \beta\,(M + \frac{v}{c}Z)$$

$$Z' = \beta\,(Z + \frac{v}{c}M) \qquad N' = \beta\,(N - \frac{v}{c}Y)$$

これらの方程式の解説について，次のことに注意しよう。静止系Kで測られた荷電が1であったとしよう。すなわち同じ量の電荷が1 cm離れてあるときに，1ダインの力が働くものとする。相対性原理によると，この荷電が運動している系で測られた時にも又1という大きさを持つ。もしその量の電荷が静止系に対して静止しているならば，定義によってベクトル（X, Y, Z）はそれに働く力に等しい。もしその電荷が運動している系に対して静止しているならば（少なくとも適当な時間），それに働く力は運動している系で測られるならば，ベクトル（X', Y', Z'）に等しい。結果として，上記のはじめの3つの方程式は，言葉で言えば次の2つの項目を付与されるべきであろう。

1．もし単位点電荷が電磁場の中を運動しているのなら，それらに対して電気力に加えて起電力が働く。その起電力は$\frac{v}{c}$より高次の項を省略するならば，光の速さによって除された磁力と電荷の速さのベクトル積に等しい（古い表現によると）。

2．もし単位点電荷が電磁場の中を運動しているならば，それに働く力は荷電のある場所に存在する電力に等しい。そしてこのことは，我々が荷電に対して静止している座標系に対する場の変換によって確かめたものである（新しい表現による）。

類似のことは“起磁力”に関しても言える。我々は起電力が新しい理論においては単に部分的な補助的な概念にすぎず，このことは座標系の運動状態において電力と磁力が独立には存在しないという状況へのその導入によるものである。

さらに，磁石と導線の相対的な運動によって起された電流を考えるときに生じたような，はじめに述べた非対称性が今，消滅したことはあきらかである。さらに，電気力的起電力（単極の機構）の“座席”に関する疑問は今や問題ではない。

§9　ドップラーの原理と光行差の理論

K系で座標原点から遠く離れて電磁波の源があるものとしよう。そしてこの電磁波は，座標の原点を含む空間の部分で次の方程式によって，十分な程度の近似にまで表現されうる。

$$X = X_0 \sin \phi \qquad L = L_0 \sin \phi$$
$$Y = Y_0 \sin \phi \qquad M = M_0 \sin \phi$$
$$Z = Z_0 \sin \phi \qquad N = N_0 \sin \phi$$

ここで

$$\phi = w \{ t - \frac{1}{c}(lx + my + nz) \}$$

である。又，$(X_0,\ Y_0,\ Z_0)$ と $(L_0,\ M_0,\ N_0)$ は波列の振幅を定義し，l，m，n は波動の法線の方向余弦である。我々は運動している k 系の中に静止している観察者によってしらべられるときに，これらの波の構成を知りたい。

電力と磁力に§ f で見出された変換の方程式を適用し，§ c で見出された座標と時間に対する変換則を適用することによって，次の方程式を得る

$$X' = X_0 \sin \phi' \qquad L' = L_0 \sin \phi'$$

$$Y' = \beta\left(Y_0 - \frac{v}{c} N_0\right) \sin \phi' \qquad M' = \beta\left(M_0 + \frac{v}{c} Z_0\right) \sin \phi'$$

$$Z' = \beta\left(Z_0 + \frac{v}{c} M_0\right) \sin \phi' \qquad N' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{c} Y_0\right) \sin \phi'$$

$$\phi' = w' \{ \tau - \frac{1}{c}(l' \xi + m' \eta + n' \zeta) \}$$

$$w' = w \beta \left(1 - \frac{lv}{c}\right) \qquad l' = \frac{l - \frac{v}{c}}{1 - \frac{lv}{c}}$$

$$m' = \frac{m}{\beta\left(1 - \frac{lv}{c}\right)} \qquad n' = \frac{n}{\beta\left(1 - \frac{lv}{c}\right)}$$

なぜなら，

$$\begin{aligned}
\phi &= w \{ t - \frac{1}{c}(lx + my + nz) \} \\
&= w \{ \beta\left(\tau + \frac{v}{c^2}\xi\right) - \frac{1}{c}[l\beta(v\tau + \xi) + m\eta + n\zeta] \} \\
&= w \{ \beta\left(1 - \frac{lv}{c}\right)\tau - \frac{1}{c}[\beta\left(l - \frac{v}{c}\right)\xi + m\eta + n\zeta] \} \\
&= w\beta\left(1 - \frac{lv}{c}\right) \left\{ \tau - \frac{1}{c}\left[\frac{l - \frac{v}{c}}{1 - \frac{lv}{c}}\xi + \frac{m}{\beta\left(1 - \frac{lv}{c}\right)} + \frac{n}{\beta\left(1 - \frac{lv}{c}\right)} \right] \right\} \\
&= w' \{ \tau - \frac{1}{c}(l'\xi + m'\eta + n'\zeta) \} = \phi'
\end{aligned}$$

w' に対する方程式から，振動数 ν の光の無限遠の源に相対的に速度 v で観察者が運動して

いるならば，“源—観察者”を結ぶ線は光の源に相対的に静止している座標系に対する観察者の速度と ϕ という角をなす。そして観察者によって知覚される光の振動数 ν' は次の方程式によって与えられる

$$\nu' = \nu \frac{1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

これはあらゆる速度に対応するドップラー効果である。$\phi=0$ のとき，方程式は次のようなわかりやすいかたちになる

$$\nu' = \nu \frac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)}} = \nu\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

そして又，$\nu=-c$ のとき通常の場合とはちがって，$\nu'=\infty$ を得る。

運動している系の波動の法線（光線の方向）と“源—観察者”を結ぶ線とのなす角を ϕ' とするならば，さっきの l' がその型を与えてくれる

$$\cos\phi' = \frac{\cos\phi - \frac{v}{c}}{1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}}$$

これはその光行差をあらわす最も一般的な型であり，もし $\phi=\frac{\pi}{2}$ ならば，方程式は簡単に次のようになる

$$\cos\phi' = -\frac{v}{c}$$

運動している系にそれがあらわれたときに，我々は波の振幅を見出さなければならない。もし電気又は磁気の力の振幅を運動している系で測ったときに A'，静止系で測ったときに A とすると，次の関係がある

$$A'^2 = A^2\frac{\left(1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

もし $\phi=0$ ならば簡単になって，次のようになる

$$A'^2 = A^2\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}$$

これらの結果から，速度 c で光の源に近づきつつある観察者に対して，この光の源は無限の強度で現われねばならないことがわかる。

§h　光線のエネルギーの変換　完全反射に及ぼされる放射の圧力の理論

$\frac{A^2}{8\pi}$ が単位体積の光のエネルギーに等しいので，相対性原理によって，運動系での光のエ

ネルギーは$\frac{A'^2}{8\pi}$とみなす。このように$\frac{A'^2}{A^2}$は，もし光の複合体の体積がK系とk系で等しければ，与えられた光の複合体の運動系で測定されたエネルギーに対する静止系で測定されたエネルギーの比である。しかし，これは納得させるにたる議論ではない。もしl，m，nが光の速さで運動している球面の表面要素を通るエネルギーの道筋ではなくて，静止系での光の波動法線の方向余弦であるとすれば，

$$(x-lct)^2+(y-mct)^2+(z-nct)^2=R^2$$

我々はそれ故，この表面は永久に同じ光の複合体を包むものであるといってよい。我々はk系で観察された，この表面によって包まれたエネルギーの量に関して問いたい。すなわち，k系に対する相対的な光の複合体のエネルギーに関してである。

球表面――運動している系で観察した――は楕円面であり，$\tau=0$時刻に対するこの表面の方程式は

$$\left(\beta\xi-\frac{l\beta\xi v}{c}\right)^2+\left(\eta-\frac{m\beta\xi v}{c}\right)^2+\left(\zeta-\frac{n\beta\xi v}{c}\right)^2=R^2 \qquad (33)$$

もしSが球の体積で，S'が楕円体の体積であるとすれば，次のような計算によってS'とSの比が求められる。(33)式より

$$\beta^2\left(1-\frac{lv}{c}\right)^2\xi^2+\left(\eta-\frac{m\beta\xi v}{c}\right)^2+\left(\zeta-\frac{n\beta\xi v}{c}\right)^2=R^2$$

$$\frac{\xi^2}{\dfrac{R^2}{\beta^2\left(1-\dfrac{lv}{c}\right)^2}}+\frac{\left(\eta-\dfrac{m\beta\xi v}{c}\xi\right)^2}{R^2}+\frac{\left(\zeta-\dfrac{n\beta\xi v}{c}\xi\right)^2}{R^2}=1$$

$$S'=\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{\beta\left(1-\dfrac{lv}{c}\right)}=\frac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{lv}{c}}S$$

$$\frac{S'}{S}=\frac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{lv}{c}}=\frac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{\cos\phi\cdot v}{c}} \qquad (34)$$

このようにもし我々がこの表面で囲まれた静止系で測定したエネルギーをE，運動している系で測定したエネルギーをE'とすれば，

$$\frac{E'}{E}=\frac{A'^2S'}{A^2S}=\frac{\left(1-\dfrac{\cos\phi\cdot v}{c}\right)^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\dfrac{\cos\phi\cdot v}{c}\right)}=\frac{1-\dfrac{\cos\phi\cdot v}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

となり，もし$\phi=0$ならば簡単に

$$\frac{E'}{E}=\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

となる。

光の複合体のエネルギーと振動数は観測者の運動によって，同じ法則で変化するということは注目にあたいする。

さて，$\xi=0$ の座標平面は，§8で考えられた平面波が反射される完全な反射表面である。我々は反射面に働く光の圧力を求め，反射後の方向と振動数と強度を求めよう。入射光が A, $\cos\phi$，ν で定義されているものとしよう。運動する系から見るとこれらの量は，

$$A'=A\frac{1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\cos\phi'=\frac{\cos\phi-\frac{v}{c}}{1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}}$$

$$\nu'=\nu\frac{1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

であり，反射光について，k 系の過程に対して

$$A''=A' \quad \cos\phi''=-\cos\phi' \quad \nu''=\nu'$$

を得る。最後に静止系 K にもどって，反射光に対して

$$A'''=A''\frac{1+\cos\phi''\cdot\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=A\frac{\left(1+\cos\phi''\cdot\frac{v}{c}\right)\left(1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$=A\frac{\left(1-\frac{\cos\phi-\frac{v}{c}}{1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}}\cdot\frac{v}{c}\right)\left(1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}}=A\frac{1-2\cos\phi\cdot\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\cos\phi'''=\frac{\cos\phi''+\frac{v}{c}}{1+\cos\phi''\cdot\frac{v}{c}}=\frac{-\frac{\cos\phi-\frac{v}{c}}{1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}}+\frac{v}{c}}{1-\frac{\cos\phi-\frac{v}{c}}{1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}}\frac{v}{c}}=\frac{-\cos\phi+\frac{v}{c}+\frac{v}{c}-\cos\phi\cdot\frac{v^2}{c^2}}{1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}}$$

$$=-\frac{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\cos\phi-2\frac{v}{c}}{1-2\cos\phi\cdot\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1+\cos\phi''\cdot\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \nu \frac{\left(1-\frac{\cos\phi-\frac{v}{c}}{1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}}\cdot\frac{v}{c}\right)\left(1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= \nu \frac{1-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}-\cos\phi\cdot\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \nu \frac{1-2\cos\phi\cdot\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

単位時間のミラー領域での単位面積の入射エネルギーは静止領域で測ると，あきらかに $A^2(c\cos\phi-v)/8\pi$ である。単位時間にミラー領域を離れるエネルギーは $A'''^2(-\cos\phi'''+v)/8\pi$ である。この表現の差がエネルギーの原理によって，単位時間に光の圧力のなす仕事である。もしこの仕事を Pv とするならば，P は圧力である

$$\frac{A^2}{8\pi}(c\cos\phi-v)-\frac{A'''^2}{8\pi}(-c\cos\phi'''+v)$$

$$= \frac{A^2}{8\pi}(c\cos\phi-v)-\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(1-2\cos\phi\cdot\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}\right)^2\left\{c\frac{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\cos\phi-2\frac{v}{c}}{1-2\cos\phi\cdot\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}}+v\right\}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}$$

$$= \frac{A^2}{8\pi}(c\cos\phi-v)-\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(1-2\cos\phi\cdot\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}\right)\left\{c\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\cos\phi-2v+v-2\cos\phi\cdot\frac{v^2}{c}+\frac{v^3}{c^2}\right\}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}$$

$$= \frac{A^2}{8\pi}(c\cos\phi-v)-\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(1-2\cos\phi\cdot\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}\right)\left(c\cos\phi-\cos\phi\cdot\frac{v^2}{c}-v+\frac{v^3}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}$$

$$= \frac{A^2}{8\pi}(c\cos\phi-v)-\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(1-2\cos\phi\cdot\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}\right)(c\cos\phi-v)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{A^2}{8\pi}\frac{(c\cos\phi-v)\left(-2\frac{v^2}{c^2}+2\cos\phi\cdot\frac{v}{c}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 2\cdot\frac{A^2}{8\pi}\frac{\frac{v}{c^2}(c\cos\phi-v)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= 2\cdot\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(\cos\phi-\frac{v}{c}\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}v = Pv$$

実験と他の理論との一致のために，第一近似で次の式を得る。

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\phi$$

運動体におけるすべての光学の問題はここで採用された方法で解かれる。本質的なことは，

運動体に影響された光の電力と磁力は物体に対して静止している座標系に変換されうるということである。この方法によって，運動体の光学におけるすべての問題は静止体の光学の問題の系列に帰着する。

§i　携帯電流が考慮に入れられたときのマックスウェル・ヘルツ方程式の変換

我々は次の方程式から出発しよう

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial X}{\partial t}+u_x\rho\right\}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Y}{\partial t}+u_y\rho\right\}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z} \tag{35}$$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Z}{\partial t}+u_z\rho\right\}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}$$

ここで，

$$\rho=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z} \tag{36}$$

は，電気密度に 4π がかかっている記号で，$(u_x,\ u_y,\ u_z)$ は荷電の速度ベクトルを示す。荷電が剛体に常に組み合っているとするならば（電子やイオン），これらの方程式はローレンツ電気力学や運動体の光学の電磁的基礎となる。

さて，これらの方程式が K 系で有効であり，§c と§f で与えられた変換則によって k 系へ変換されるものとする。我々はそこで，次の式を得る

$$\tau=\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \qquad \rho'=\frac{\partial X'}{\partial \xi}+\frac{\partial Y'}{\partial \eta}+\frac{\partial Z'}{\partial \zeta}=\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi}+\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)}{\partial y}$$

$$\xi=\beta(x-vt) \qquad +\frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)}{\partial z}=\beta\frac{v}{c^2}\frac{\partial X}{\partial t}+\beta\frac{\partial X}{\partial x}+\beta\frac{\partial Y}{\partial y}-\beta\frac{v}{c}\frac{\partial N}{\partial y}$$

$$\eta=y \qquad +\beta\frac{\partial Z}{\partial z}+\beta\frac{v}{c}\frac{\partial M}{\partial z}$$

$\zeta=z$　　(35)，(36)式より

$$t=\beta\left(\tau+\frac{v}{c^2}\xi\right) \qquad =\beta\frac{v}{c}\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)-\beta\frac{v}{c^2}u_x\rho-\beta\frac{v}{c}\frac{\partial N}{\partial y}+\beta\frac{v}{c}\frac{\partial M}{\partial z}+\beta\rho$$

$$x=\beta(v\tau+\xi) \qquad =\beta\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)\rho$$

$$y=\eta \qquad \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial X'}{\partial \tau}+u_\xi\rho'\right\}=\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau}+u_\xi\rho'\right\}$$

$$z=\zeta \qquad =\frac{1}{c}\left\{\beta\frac{\partial X}{\partial t}+\beta v\frac{\partial X}{\partial x}+u_\xi\rho'\right\}=\beta\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)$$

$$X' = X \qquad -\frac{\beta}{c}u_x\rho + \frac{\beta v}{c}\left(\rho - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \frac{\beta}{c}(u_x - v)\,\rho$$

$$L' = L \qquad = \frac{\partial N'}{\partial y} - \frac{\partial M'}{\partial z} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}$$

$Y' = \beta\,(Y - \frac{v}{c}N)$　故に

$$M' = \beta\,(M + \frac{v}{c}Z) \qquad \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial X'}{\partial \tau} + u_\xi\,\rho'\right\} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta} \tag{37}$$

$$Z' = \beta\,(Z + \frac{v}{c}M)$$

$$N' = \beta\,(N - \frac{v}{c}Y) \qquad \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Y'}{\partial \tau} + u_\eta\,\rho'\right\} = \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Y'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial Y'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + u_y\,\rho\right\}$$

$$= \frac{1}{c}\left\{\beta\frac{\partial Y'}{\partial t} + \beta v\frac{\partial Y'}{\partial x}\right\} + \frac{1}{c}u_y\,\rho$$

$$= \frac{1}{c}\beta^2\left\{\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{v}{c}\frac{\partial N}{\partial t}\right\} + \frac{1}{c}\beta^2 v\left\{\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{v}{c}\frac{\partial N}{\partial x}\right\} + \frac{1}{c}u_y\,\rho$$

$$= \frac{1}{c}\beta^2\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{v}{c^2}\beta^2\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{c}\beta^2 v\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{v^2}{c^2}\beta^2\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{1}{c}u_y\,\rho$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi} = \frac{\partial L}{\partial z} - \beta\frac{\partial\left(N - \frac{v}{c}Y\right)}{\partial \xi} = \frac{\partial L}{\partial z} - \beta\frac{\partial\left(N - \frac{v}{c}Y\right)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi}$$

$$-\beta\frac{\partial\left(N - \frac{v}{c}Y\right)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial L}{\partial z} - \beta^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial N}{\partial t} + \beta^2\frac{v^2}{c^3}\frac{\partial Y}{\partial t}$$

$$-\beta^2\frac{\partial N}{\partial x} + \beta^2\frac{v}{c}\frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Y'}{\partial \tau} + u_\eta\,\rho'\right\} - \frac{\partial L'}{\partial \zeta} + \frac{\partial N'}{\partial \xi} = \frac{1}{c}\beta^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial Y}{\partial t}$$

$$+ \frac{1}{c}u_y\,\rho - \frac{\partial L}{\partial z} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\beta^2\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Y}{\partial t} + u_y\,\rho\right\} - \frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

故に

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Y'}{\partial \tau} + u_\eta\,\rho'\right\} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi} \tag{38}$$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Z'}{\partial \tau}+u_{\zeta}\rho'\right\}=\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Z'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{\partial Z'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau}+u_{z}\rho\right\}$$

$$=\frac{1}{c}\left\{\beta\frac{\partial Z'}{\partial t}+v\beta\frac{\partial Z'}{\partial x}+u_{z}\rho\right\}$$

$$=\frac{1}{c}\left\{\beta^{2}\frac{\partial\left(Z+\frac{v}{c}M\right)}{\partial t}+v\beta^{2}\frac{\partial\left(Z+\frac{v}{c}M\right)}{\partial x}+u_{z}\rho\right\}$$

$$=\frac{1}{c}\left\{\beta^{2}\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{v}{c}\beta^{2}\frac{\partial M}{\partial t}+v\beta^{2}\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{v^{2}}{c}\beta^{2}\frac{\partial M}{\partial x}+u_{z}\rho\right\}$$

$$\frac{\partial M'}{\partial \xi}-\frac{\partial L'}{\partial \eta}=\frac{\partial M'}{\partial t}\frac{\partial t'}{\partial \xi}+\frac{\partial M'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial L}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial M'}{\partial t}\beta\frac{v}{c^{2}}+\beta\frac{\partial M'}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}=\beta^{2}\frac{v}{c^{2}}\frac{\partial\left(M+\frac{v}{c}Z\right)}{\partial t}$$

$$+\beta^{2}\frac{\partial\left(M+\frac{v}{c}Z\right)}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}$$

$$=\beta^{2}\frac{v}{c^{2}}\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{v^{2}}{c^{3}}\beta^{2}\frac{\partial Z}{\partial t}+\beta^{2}\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{v}{c}\beta^{2}\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}$$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Z'}{\partial \tau}+u_{\zeta}\rho'\right\}-\frac{\partial M'}{\partial \xi}+\frac{\partial L'}{\partial t}=\frac{1}{c}\beta^{2}\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)\frac{\partial Z}{\partial t}+u_{z}\rho$$

$$-\beta^{2}\left(1-\frac{v^{2}}{c^{2}}\right)\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial L}{\partial y}=0\quad \text{((35)式より)}$$

故に

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Z'}{\partial \tau}+u_{\zeta}\rho'\right\}=\frac{\partial M'}{\partial \xi}-\frac{\partial L'}{\partial \eta} \tag{39}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau}=\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau}\right\}=\frac{1}{c}\left\{\beta\frac{\partial L}{\partial t}+\beta v\frac{\partial L}{\partial x}\right\}$$

$$=\frac{1}{c}\beta\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\beta v}{c}\left\{-\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right\}=\beta\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

$$-\frac{\beta v}{c}\left(\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)=\frac{\partial Y'}{\partial z}-\frac{\partial Z'}{\partial y}=\frac{\partial Y'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \eta}$$

故に

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau}=\frac{\partial Y'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \eta} \tag{40}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau}=\frac{\beta}{c}\frac{\partial\left(M+\frac{v}{c}Z\right)}{\partial \tau}=\frac{\beta}{c}\frac{\partial\left(M+\frac{v}{c}Z\right)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$+\frac{\beta}{c}\frac{\partial\left(M+\frac{v}{c}Z\right)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau}$$

$$=\frac{\beta^2}{c}\frac{\partial\left(M+\frac{v}{c}Z\right)}{\partial t}+\frac{\beta^2}{c}v\frac{\partial\left(M+\frac{v}{c}Z\right)}{\partial x}$$

$$=\frac{\beta^2}{c}\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{v}{c^2}\beta^2\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{v}{c}\beta^2\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{v^2}{c^2}\beta^2\frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Z'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \zeta}=\beta\frac{\partial\left(Z+\frac{v}{c}M\right)}{\partial \xi}-\frac{\partial X}{\partial z}$$

$$=\beta\frac{\partial\left(Z+\frac{v}{c}M\right)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi}+\beta\frac{\partial\left(Z+\frac{v}{c}M\right)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial X}{\partial z}$$

$$=\frac{v}{c^2}\beta^2\frac{\partial\left(Z+\frac{v}{c}M\right)}{\partial t}+\beta^2\frac{\partial\left(Z+\frac{v}{c}M\right)}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}$$

$$=\frac{v}{c^2}\beta^2\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{v^2}{c^3}\beta^2\frac{\partial M}{\partial t}+\beta^2\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{v}{c}\beta^2\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau}-\frac{\partial Z'}{\partial \xi}+\frac{\partial X'}{\partial \zeta}=\frac{\beta^2}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial M}{\partial t}-\beta^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial z}=0$$

故に

$$\frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau}=\frac{\partial Z'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \zeta} \tag{41}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial \tau}=\frac{\beta}{c}\frac{\partial\left(N-\frac{v}{c}Y\right)}{\partial \tau}=\frac{\beta}{c}\frac{\partial\left(N-\frac{v}{c}Y\right)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{\beta}{c}\frac{\partial\left(N-\frac{v}{c}Y\right)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau}$$

$$=\frac{\beta^2}{c}\frac{\partial\left(N-\frac{v}{c}Y\right)}{\partial t}+\frac{v}{c}\beta^2\frac{\partial\left(N-\frac{v}{c}Y\right)}{\partial x}$$

$$=\frac{\beta^2}{c}\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{v}{c^2}\beta^2\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{v}{c}\beta^2\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{v^2}{c^2}\beta^2\frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial X'}{\partial \eta}-\frac{\partial Y'}{\partial \xi}=\frac{\partial X}{\partial y}-\beta\frac{\partial\left(Y-\frac{v}{c}N\right)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi}-\beta\frac{\partial\left(Y-\frac{v}{c}N\right)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}$$

$$=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{v}{c^2}\beta^2\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{v^2}{c^3}\beta^2\frac{\partial N}{\partial t}-\beta^2\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{v}{c}\beta^2\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial \tau}-\frac{\partial X'}{\partial \eta}+\frac{\partial Y'}{\partial \xi}=\frac{1}{c}\beta^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial N}{\partial t}+\beta^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0$$

故に,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial \tau}=\frac{\partial X'}{\partial \eta}-\frac{\partial Y'}{\partial \xi} \tag{42}$$

ここで,

$$u_\xi=\frac{u_x-v}{1-\frac{u_x v}{c^2}} \quad u_\eta=\frac{u_y}{\beta\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \quad u_\zeta=\frac{u_z}{\beta\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

$$\rho'=\frac{\partial X'}{\partial \xi}+\frac{\partial Y'}{\partial \eta}+\frac{\partial Z'}{\partial \zeta}=\beta\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)\rho$$

である。§e の速度の加法の理論から,(u_ξ, u_η, u_ζ) というベクトルは,k 系で測定された荷電の速度に他ならない。我々は,我々の運動学的基礎のもとに,運動物体の電気力学のローレンツ理論に基く電気力学は,相対性原理に矛盾しないことを証明した。

加うるに,展開した方程式からたやすく導かれる次の重要な法則を述べよう。もし帯電した物体が荷電を変化させずに空間を運動しているなら,すなわち物体と一緒に運動している座標系から測定したときに荷電が一定であるとき,その荷電は又,静止系 K から測定した場合も一定値を取るという法則である。

§ j　ゆっくりと加速された電子の力学

帯電した粒子が電磁場の中を運動しているものとしよう(こののち電子と呼ぶが),その運動は次のように仮定される。

もし電子がある時刻に静止しているならば,次の瞬間に結果として起る電子の運動は次の方程式によっている

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\epsilon X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\epsilon Y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=\epsilon Z$$

ここで x, y, z は電子の座標を表わし,m はその運動が遅いかぎり,その質量をあらわしている。

さて,次に与えられた時刻での電子の速度を v とする。我々は次の瞬間にただちに結果として起る電子の運動の法則を求めている。

我々の思考の一般的な性格に影響を与えることなしに,我々が注目する時刻に座標の原点に電子があり,K 系の X 軸にそって速度 v で運動しているものとする。与えられた時刻 ($t=0$) に,X 軸にそって v という速度で平行に運動している座標系に対して電子は相対的に静止していることはあきらかである。

上の仮定から相対性原理と結びつけて考えて，瞬間的に結果としてつづく時間に，k 系から観測された電子は次の方程式に一致するように運動する

$$m\frac{d^2\xi}{d\tau^2}=\epsilon X'$$

$$m\frac{d^2\eta}{d\tau^2}=\epsilon Y'$$

$$m\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}=\epsilon Z'$$

ここで記号 ξ，η，ζ，τ，X', Y', Z' は k 系に関するものである。さらにもし，$t=x=y=z=0$ のとき，$\tau=\xi=\eta=\zeta=0$ と定めるならば，§c と§f の変換の方程式が正しいものとすると，次のようになる

$$\xi=\beta(x-vt)\qquad \eta=y\qquad \zeta=Z\qquad \tau=\beta\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)$$

$$X'=X\qquad Y'=\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\qquad Z'=\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)$$

これらの方程式の助けによって，上の方程式を k 系から K 系に変換し，そして次の方程式を得る

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{\epsilon}{m\beta^3}X\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{\epsilon}{m\beta}\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{\epsilon}{m\beta}\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\end{aligned}\tag{43}$$

通常の観点から，運動する電子の“平行”と“垂直”の質量について調べてみよう。我々は方程式(43)を次の型に書く

$$m\beta^3\frac{d^2x}{dt^2}=\epsilon X=\epsilon X'$$

$$m\beta^2\frac{d^2y}{dt^2}=\epsilon\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)=\epsilon Y'$$

$$m\beta^2\frac{d^2z}{dt^2}=\epsilon\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)=\epsilon Z'$$

そして $\epsilon X'$，$\epsilon Y'$，$\epsilon Z'$ は電子の運動によって重くなった成分であり，その瞬間電子とともに電子と同じ速度で運動する系から観察したものである（この力は例えば，前述の系における静止しているバネの平衡によっても測定されるものである)。さて，もし我々がこの力を簡単に“電子に作用する力”と呼び，質量×加速度＝力という方程式を維持すれば，そして又加速が静止系で測定されるならば，上の方程式から

$$平行質量 = \frac{m}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3}$$

$$垂直質量 = \frac{m}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

となることがわかる。

力と加速度の異なる定義で，我々は質量に対する他の値を矛盾なく得た。このことは我々に電子の運動の他の理論と比べて，我々が大変注意深く進行しなければならないことを示している。

質量に関するこれらの結果は又，重さのある質点に対しても有効であることを示している。なぜなら，質量のある物質は荷電を付け加えることによって，電子にされうるからである（言葉の含みにおいて）それが，いかに小さくとも。

我々は電子の運動エネルギーを決定しよう。もし電子が静止系の原点から X 軸にそって静電力 X の作用のもとに運動するならば，静電場から引き出されたエネルギーは $\int \epsilon X dx$ という値を持つことはあきらかである。

電子はゆっくりと加速されているので，その結果放射のかたちでいかなるエネルギーも出さないので，静電場から引き出されたエネルギーは電子の運動エネルギー W に等しいとみなされる。考えているすべての作用過程の間に，方程式(43)の第一番目のものを考慮に入れたことを心に留めると，次の式を得る

$$W = \int \epsilon X dx = m\int \beta^3 \frac{d^2x}{dt^2}dx = m\int_0^v \beta^3 v dv$$

$$\left(\because \quad v dv = \frac{dx}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)dt = \frac{d^2x}{dx^2}dx \right)$$

$$= m\int_0^v \frac{v dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{mc^2}{2}\int_0^v \frac{\frac{2v}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}dv$$

$$= \left[\frac{mc^2}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\cdot 2\right]_0^v = \left[mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right]_0^v$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right\}$$

このように $v=c$ のとき W は無限大になる。光のエネルギーより大きな速度は――我々の以前の結果のように――その存在の可能性はない。

運動エネルギーに対するこの表現は，上に述べた理論によって，重い質量にも適用される。

さて(43)の方程式の系からの結果である電子の特質を列挙しよう。そして実験に入りやすいようにしよう。

1．(43)式の2番目の方程式から，$Y = \frac{v}{c}N$ でかつ速度 v で電子が運動しているときに，電

力 Y と磁力 N が等しい強さの反らせる力を持っている。このように x 軸方向の反らせる電力 $\boldsymbol{Ae}$ と反らせる磁力 $\boldsymbol{Am}$ の比から，如何なる速度に対しても $\frac{\boldsymbol{Am}}{\boldsymbol{Ae}}=\frac{v}{c}$ という法則を用いて電子の速度を我々の理論から決定できる。$\frac{\boldsymbol{Am}}{\boldsymbol{Ae}}=\frac{v}{c}$ という関係は実験的にためされうる。なぜなら電子の速度は，例えば速く振動する電場と磁場を用いて直接測られるので。

2．電子の運動エネルギーに対して得られた方程式から，保存力の差と電子の旋回する速度 v の間に次の関係がある，

$$P=\int Xdx=\frac{mc^2}{\epsilon}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right\}$$

3．我々は磁力 N がかかっている時に電子軌道の曲線の半径を計算しよう（磁力 N は唯，反らせる力としてかかっている)。

このNは電子の速度に垂直に作用している。方程式(43)の2番目のものから，次の式を得る

$$-\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{v^2}{R}=\frac{\epsilon v}{mc}N\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\left(\because\quad Y=0\text{ で，}\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\epsilon}{m\beta}\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\ \text{なので}\ \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\epsilon}{m\beta}\frac{v}{c}N\right)$$

又は，

$$R=\frac{mv^2}{\epsilon}\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{N}$$

これら3つの関係は，ここで発展された理論によって電子が従って運動しなければならない法則に対する表現である。

第Ⅱ部

ここでは，アインシュタイン1905年のもう一つの論文“Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig ?”（Annalen der Physik 17, 1905）の英訳“Does The Inertia Of A Body Depend Upon Its Energy-Content ?”をまとめてみました。

第Ⅰ部の論文の研究結果はここで得られた興味ある結果を導く。

真空に対するマックスウェル・ヘルツの方程式の研究に基づいて，電磁エネルギーに対するマックスウェリアンとともに，又これらに加えて，次の原理に基づいて，

物理系の状態が変えられる法則は，2つの座標系のいずれを取るかにはよらない。すなわち，これらの変化がひきあいに出される2つの座標が相対的に相互に一様な平行移動の運動をしている。（相対性原理）

特に§hでみちびいたことを基礎とするこれらの原理でもって以下の議論をすすめよう。

$(x,\ y,\ z)$ 座標系に関して，光の平面波の系がエネルギー l を持つものとし，光線の方向が系の x 軸と ϕ という角をなすものとしよう（光線の方向というのは波動法線のことである）。座標 $(x,\ y,\ z)$ に関して一様平行移動しながら運動している座標系（$\xi,\ \eta,\ \zeta$）を導入し，その原点が x 軸にそって速度 v で運動しているものとする。そこで，（$\xi,\ \eta,\ \zeta$）系で測られた光の量は次のエネルギーを持つ

$$l^{*}=l\frac{1-\dfrac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{1-\dfrac{v^{2}}{c^{2}}}}$$

ここで c は光の速度をあらわす。そこで我々はこの結果を次のように利用する。系 $(x,\ y,\ z)$ に静止体があり，その系に関するエネルギーが E_0 であるとしよう。上記のように v という速度で運動している系（$\xi,\ \eta,\ \zeta$）に関する物体のエネルギーが H_0 であるものとする。

x 軸と ϕ の角をなす方向にこの物体が光の平面波を送り出すものとしよう。この平面波は $(x,\ y,\ z)$ に相対的に測定して $\frac{1}{2}L$ のエネルギーを持つとし，反対方向に同じ量の光を送り出すものとする。一方では，物体は $(x,\ y,\ z)$ 系に関して静止してとどまっているものとする。エネルギーの原理はこの過程に適用されねばならないし，事実（相対性原理によって）両座標系に関して適用されなければならない。もし我々が光の放出ののちにそれぞれ $(x,\ y,\ z)$ 又は（$\xi,\ \eta,\ \zeta$）座標系に関して測られた物体のエネルギーを E_1，H_1 と呼ぶならば，上に与えられた関係を採用することによって，次の式を得る

$$E_0=E_1+\frac{1}{2}L+\frac{1}{2}L$$

$$H_0=H_1+\frac{1}{2}L\frac{1-\dfrac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{1-\dfrac{v^{2}}{c^{2}}}}+\frac{1}{2}L\frac{1+\dfrac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{1-\dfrac{v^{2}}{c^{2}}}}$$

$$=H_1+\frac{L}{\sqrt{1-\dfrac{v^{2}}{c^{2}}}}$$

引き算によって，次の式を得る

$$H_0-E_0-(H_1-E_1)=L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^{2}}{c^{2}}}}-1\right\}$$

２つの $H-E$ というこの表現の中の形は，簡単な物理的意味を持つ。H と E は互いに運動している２つの座標系に関する同じ物体のエネルギー値であり，物体はその一方の座標系 $(x,\ y,\ z)$ に関して静止している。このように，$H-E$ という相違は座標系（$\xi,\ \eta,\ \zeta$）に関する物体の運動エネルギー K と定数 C だけちがうだけである。そして又この定数はエネルギー H と E に加えるべき任意定数の選択によっている。そこで，次のように取る

$$H_0-E_0=K_0+C$$

$$H_1-E_1=K_1+C$$

C は光の放出の間に変わらない。それ故我々は,

$$K_0 - K_1 = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right\}$$

を得る。

(ξ, η, ζ) に関する物体の運動エネルギーは光のエネルギー放射の結果減じられ，そして減った量は物体の特性には独立である。その上に電子（§ j ）の運動エネルギーのように K_0－K_1 の違いは速度によるものである。

四次とそれ以上の次元を省略して

$$K_0 - K_1 = \frac{1}{2}\frac{L}{c^2}v^2$$

を得る。

この方程式から次の事柄が言える。もし光の放射のかたちで物体がエネルギー L を失うならば，その質量は $\frac{L}{c^2}$ だけ減じる。物体から引き出されたエネルギーは放射のエネルギーとなることはあきらかであり，その結果より一般的な次の結果をうる。物体の質量はそのエネルギー内容の測度である。もしエネルギーが L だけ変わるならば，質量は同じ意味で $L/9\times10^{20}$ だけ変わる。エネルギーはエルグで測り，質量はグラムで測る。

そのエネルギー内容が高度に変わりやすい物体に対しても，理論はテストに対して成功した結果を与える。

もし理論が事実と一致するならば，光の放射は放射物体と吸収物体間を慣性質量を運ぶ。

参考文献

"The Principle of Relativity"
(A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity)
by H. A. LORENTZ　A. EINSTEIN　H. MINKOWSKI and H. WEYL
with notes by A. SOMMERFELD
translated by W. PERRETT and G. B. JEFFERY
出版社 Dover Publications, Inc.

原稿受理　1986年12月 1 日