クワンタムクロモダイナミックス
の基礎になっている代数

宮 本 道 子

Summary

Algebra Which Underlies Quantum Chromodynamics

Michiko Miyamoto

In the first chapter, I described what is color and what is quantum chromodynamics according to Prof. Chris Quigg. In the Second chapter, I investigated what is SU(3) group having unitary symmetry which underlies quantum chromodynamics, according to Prof. Murray Gell-Mann's the "eightfold way".

第I章　序　　説

コークをレプトンと区別する特質がカラーである。それゆえ，局所カラーゲージ対称性に基づくコークの間の強い相互作用の理論の構成が，自然に企てられる。その結果，構成された理論がクワンタムクロモダイナミックス（QCD）と名づけられた。

$U(3)$ カラーゲージ理論において，次の直積の中に生ずる，

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{1} + \mathbf{8}$$

カラーシングレットボソンなしでは，理論を構成することは出来ない（SU(3) 記号において)。それは長距離のカラーシングレットハンドロンの間の強い相互作用を媒介とし,ヤング・ミルズ理論を無視するのと同じ実験的事実によって除外される。このようにU(3)は拒まれ，候補になるゲージ群として，SU(3)が残されている。

我々はカラー・トリプレットコークの相互作用に対するカラーゲージ理論を構成したい。理論の中に現れる，カラーオクテットゲージボゾンはグルーオンと呼ばれているが，それはなぜなら，ハドロンの内部で，コークを結びつける役目をしているからである。理論に対するラグランジアは，次のようなスタンダードな形をしているであろう，

$$L = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi - \frac{1}{2}tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})$$

ここで，カラートリプレットコークに対する混合スピノールは

$$\Psi = \begin{pmatrix} q_{\rm red} \\ q_{\rm blue} \\ q_{\rm green} \end{pmatrix}$$

であり，共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\boldsymbol{B}_\mu$$

で，B_μ は8つのカラーゲージ場 b_μ^l と成生元である $SU(3)$ の $\frac{\lambda^l}{2}$ から形成される，カラー空間における3×3行列である

$$\boldsymbol{B}_\mu = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{b}_\mu = \frac{1}{2}\lambda^l b_\mu^l$$

又，グルーオン場の強さのテンソルは

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\boldsymbol{G}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2}G_{\mu\nu}^l\lambda^l$$

$$= (ig)^{-1}[D_\nu, D_\mu] = \partial_\nu\boldsymbol{B}_\mu - \partial_\mu\boldsymbol{B}_\nu + ig[\boldsymbol{B}_\nu, \boldsymbol{B}_\mu]$$

である。ここで行列 λ_1, λ_2, λ_3 は，カラー（R, B, G）がコークモデルの（u, d, s）でおきかえられるときに又，坂田モデルでの（p, n, Λ）でおきかえられるときに，パウリスピン行列と

なる。次の節から坂田モデルを参照して，$SU(3)$ 代数について，くわしく書かれている Murray Gell-Mann の論文（参考文献II）をまとめておく。（この序論は，参考文献Iを参照した。）

第II章　バリオンとメソンの対称性

摂動として，電磁的相互作用と弱い相互作用，そして重力的な相互作用を考慮する強い相互作用をする粒子の系が議論されている。電流j_{α}と弱い電流J_{α}，そして重力テンソル$\theta_{\alpha\beta}$はすべて分散関係に従う有限行列要素を用いてよく定義されたオペレーターである。真空と他の状態の間のこれらオペレーターの行列要素に対する分散関係が高度に収束し，1個のメソン中間状態からの寄与が優勢である範囲で，我々はゴールドバーガー・トライマン公式のような関係を持ち，ρ中間子が近似的にアイソスピンに結合する場合に従う桜井のユニバーサリティー原理を持つ。同次線型関係はこれら行列要素の大きさを固定するに十分ではないし，特に，非保存電流に対して，くりこみ因子は計算出来ないし，弱い相互作用の強さのユニバーサリティーは定義されない。単なる分散関係より以上の情報が供給されるべきである。例えば場の理論のモデルによれば事実，j_4とJ_4の種々の部分の同時交換関係を考慮する。これら非線形関係は，バリオンとメソンの構造の根底に横たわる代数的系（又は群）を定義する。群は事実対称坂田モデルによって例証される$U(3)\times U(3)$であることが暗示されている。ハミルトニアン密度θ_{44}は群のもとに完全に不変ではないし，非不変部分は群の特殊な表現に従って変換する。この情報は又，対称坂田モデルによって正しく与えられ得る。いろいろな正確な形状因子の間の関係は，代数的構造となる。さらに，ストレンジネスを変えるベクトル電流とハミルトニアンが$U(3)$のもとに不変である近似的状態を考えることが，やってみる価値のあることであろう。我々はこの限定された場合を，“ユニタリー対称性”として参照する。極限において，バリオンとメソンは縮退した超多重構造を形成し，ハミルトニアンの中の対称性の破れが“有効”になったときに，アイソトピック多重構造へと脱出する。メソンはユニタリーシングレットとオクテットを形成することが期待され，それぞれのオクテットはトリプレットとシングレットとストレンジ二重項からなる。知られているシュードスカラーとベクトルメソンは，もしアイソトピックシングレットシュードスカラーメソンχ^0が存在するならば又，この型に適合する。もし我々がユニタリー対称性を場の理論との関連においてよりもむしろ抽象的に考えるならば，魅力的な坂田モデルに代わるべきものとして“eightfold way”と我々が呼んでいる，Ne'eman と Gell-Mann の考案を見出す。バリオンN，Λ，Σ，Ξがベクトルとシュードスカラーメソンのように，ユニタリー対称性の極限において，オクテットを形成するというものである。しかしながら，ユニタリー対称性の破れが全く大きいにちがいないので，他のものに対する関連するある破れのいくらかの期待がある。

§a　はじめに

強い相互作用をする粒子の系との関連において，可能な近似的対称性の議論をたくさんしてきたし，この対称性は実際に破られるであろう。しかしなお，メソン結合の近似的なユニバー

サリティーやバリオンまたはメソンの近似的な超多重構造や弱い相互作用に対する電流の“部分的保存”のような物理学的な結果を生ずる。

この論文において，我々は強い相互作用と弱い相互作用の両方に対するそのような可能な対称性の意味をはっきりとさせようとしている。我々は破られた対称性が，それがひどく破られたものであっても，測定しうる量の間に正確な関係を生ずるということを示そう。さらに，我々はバリオンとメソンの系の構造の中に，最も存在しそうなものとして，特殊な対称群を暗示しよう。

近似なしで，強い相互作用を扱おう，しかし電磁的相互作用や，弱い相互作用や重力の相互作用を一次で考えよう。

電磁的結合は，電磁的カレントオペレーター $ej_\alpha(x)$ の行列要素によって記述される。同様に，重力結合は応力エネルギー・運動量テンソル $\theta_{\alpha\beta}(x)$ の行列要素によって記述され，特に $\theta_{44}=H$ はハミルトニアン密度である。

レプトンとのバリオンとメソンの弱い相互作用は次の相互作用項によって与えられると仮定される（可能な非局所性を無視して）

$$GJ_\alpha^\dagger J_\alpha^{(l)}/\sqrt{2}+H.C \tag{1.1}$$

ここで，レプトニック・ウィーク・カレント $J_\alpha^{(l)}$ は次の形を持つ

$$J_\alpha^{(l)}=i\bar{\nu}\gamma_\alpha(1+\gamma_5)e+i\bar{\nu}\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\mu \tag{1.2}$$

我々は，バリオンとメソンの弱いカレントとして $J_\alpha(x)$ を参照する。その行列要素はレプトンとの弱い相互作用を完全に明記している。

完全な弱い相互作用は簡単に次の項で与えられうる

$$G(J_\alpha+J_\alpha^{(l)})^\dagger(J_\alpha+J_\alpha^{(l)})/\sqrt{2} \tag{1.3}$$

しかしながら，この型はストレンジ粒子のノンレプトニック崩壊における $|\varDelta I|=\dfrac{1}{2}$ 近似則を導びかない。もしこの崩壊における $|\varDelta I|=\dfrac{1}{2}$ という振幅の優勢の力学的説明を見出しえないならば，我々は（1.3）に加えて，次の積を含む弱い相互作用があることを強いて仮定しうる，

$$GL_\alpha^\dagger L_\alpha/\sqrt{2} \tag{1.4}$$

荷電保存カレントで（たぶんレプトンを含まない）；又は，(1.3) を全部放棄するように強制されうる。如何なる場合においても，レプトンに対する結合によって弱いカレント J_α を定義しよう。

我々は小因果関係を仮定し，ここからいろいろなカレントと密度の分散関係を仮定しよう。さらに，高度に収束する分散関係の特殊な仮定を時には要求する。

バリオンとメソンに対する対称群の記述はスタンダード場の理論のわくの中で最も都合よく

与えられていて，ここでは強い相互作用ラグランジアン密度Lは数個の局所場 $\Psi(x)$ の簡単な関数として表現されており，この $\Psi(x)$ は“基本的”バリオンとメソンに対応すると考えられる。最近，この形の形式主義は批判されていて，強い相互作用をする粒子のどれもがひょっとすると“基本的”なものとして特別に識別されないということと，強い相互作用はS行列の解析的な性質によって十分に記述され，場の理論という武器は誤解されるやっかいなものになりうる。

もし批判が正当化されてさえも，場のオペレーター $j(x)$，$\theta_{\alpha\beta}(x)$，$J_\alpha(x)$ はなお正しく定義されうる（それからの解析接続を含むすべてのそれらの行列要素によって）そして原理的に，外部の電磁的又は重力的場はレプトン対との相互作用によって測定されうる。ハミルトニアン密度 H は $\theta_{\alpha\beta}$ の成分なので，物理的に常識的な量である。

場の理論の疑わしいと思われる細目に独立な対称群の記述をするために，我々は結局，オペレーター H，j_α，J_α の特質に関連して言いあらわす。しかしながら，その記述を導入するために，場の理論のモデルを利用する。さらに特殊な群のふるまいを記述するために，我々は特別な例である Ohnuki, et al と Yamaguchi と Wess の対称坂田モデルを広く参照する。

表現の状況は次のようである。我々はカレントの行列要素に対する高度に収束する分散関係をまず扱おう。そして“一様に”結合するということや，特定のカレントや密度と結合するというメソンの概念は，メソン状態が低い運動量ではそのカレントや密度に対する分散関係を優勢にするということを単に意味するにすぎない。次にカレント自身の強さの一様性について議論しよう。明らかにそれは，カレントの行列要素に対する同次線形分散関係からは得られない。我々はカレントに対する同時交換関係はこの要求を満たし（又はそのほとんどを），そして場の理論のモデルの幅広い組において，これらの交換則は単純で，バリオンとメソンの系の構造の根底に存在し，その対称性のいくつかはひどく破られている対称群の存在を反映している。我々は場の理論の詳細を含まない抽象的な方法で群の性質を紹介しよう。

次に問題になるのは，どんな群が実際に含まれているかである。最も簡単で，よく知られた現象と矛盾しないものは，すでに指摘されているものである。明らかにするために，特殊な場の理論との関連において，対称的坂田モデルが紹介された。このモデルにおいて，バリオンとメソンは p，n，Λ の属性を持つ基本的な物質によって構成されている。もっと簡単にするために，Λ の欠けている場合をまず議論しよう。

我々はそこで，強い相互作用の対称性の破れの疑問にもどろう。そして群の中で，対称がどのようなものか示そう。もしそれらがそんなにひどく破られていなければ，近似的に縮退した超多重項の中に示すであろう。特にメソンは“オクテット”であるべきであり，それぞれは $S=0$ の荷電三重項と $S=\pm 1$ の二重項の対と，$S=0$ のシングレットからなっている。シュードスカラーメソンの場合には，π と K と $\bar{K}$ について知っている。これらは，シグレットシュードスカラーメソンを伴ない，この χ^0 は 2γ 又は $\pi^+ + \pi^- + \gamma$ 又は 4π に崩壊する。

§h で，対称坂田モデルに代るべきものとして，“エイトフォールドウェイ”と呼んでいる，同じ群を持つ他の機構を提案する。ここで，メソン同様にバリオンはオクテットとシングレッ

トを形成し，バリオンN, Λ, Σ, Ξは近似的に縮退したオクテットを構成すると考えられる。

§b　メソンとカレント

メソン状態とカレント又は密度の間の関係を紹介するために，電荷を持つパイオン崩壊振幅の間のゴールドバーガー・トライマン関係の推論や，核子のβ崩壊におけるアクシアルベクトルウィーク相互作用の強さやパイオン–核子結合定数の推定を示す。

$\Delta S=0$．$|\Delta \boldsymbol{I}|=1$，$GP=-1$を持つ$J_\alpha$におけるアクシアルベクトル項は$P_{1\alpha}+P_{2\alpha}$のように書かれ，ここで$\boldsymbol{P}_\alpha$はアイソトピックベクトルのように変換するアクシアルベクトルカレントである。我々は核子のβ崩壊に対して，

$$\langle N|\boldsymbol{P}_\alpha|N\rangle=\bar{u}_f[i\gamma_\alpha F_{ax}(s)+k_\alpha\beta(s)]\gamma_5\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right)u_i \tag{2.1}$$

を得るが，ここでu_iとu_fは初期と終状態のスピノールであり，k_αは四次元モーメンタムトランスファーであり，$s=-k^2=-k_\alpha k_\alpha$である。$s=0$において

$$F_{ax}(0)=-G_A/G \tag{2.2}$$

という，アクシアルベクトルくりこみ定数をうる。

アクシアルベクトルは保存されず，その発散$\partial_\alpha\boldsymbol{P}_\alpha$はパイオンと同じ量子数（$\boldsymbol{J}=0^-$，$\boldsymbol{I}=1$）を持つ。核子の状態の間で，

$$\langle N|\partial_\alpha\boldsymbol{P}_\alpha|N\rangle=\bar{u}_f i\gamma_5\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right)u_i[2m_N F_{ax}(s)+s\beta(s)] \tag{2.3}$$

をうる。

我々はこの行列要素を真空と1個のメソン状態の間のそれと比較しうる

$$\langle 0|\partial_\alpha\boldsymbol{P}_\alpha|\pi\rangle=m_\pi^2(2f_\pi)^{-1}\phi \tag{2.4}$$

ここで，ϕはパイオン波動関数で，定数f_π（又は少なくともその2乗）は$\pi^+\to\mu^++\nu$の割合いによって測定され，

$$\Gamma_\pi=G^2m_\pi m_\mu^2(1-m_\mu^2/m_\pi^2)^2(f_\pi^2/4\pi)^{-1}(64\pi^2)^{-1} \tag{2.5}$$

である。

行列要素（2.3）がレプトニック崩壊を受けるパイオンの中間的放出に対応する，$s=m_\pi^2$のようなポールを持つということが知られている。ポールの強さはm_π^2/f_πとパイオン–核子の結合定数$g_{NN\pi}$の積によって与えられている。sが大きいところで括弧の中の表現が消滅すると仮定するならば，それに対してポール項と，中間的に放出され得る次の最底次の質量（$3m_\pi^2$）で始まる分枝を構成するサブトラクションのない分散関係をうる：

$$2m_NF_{ax}(s)+s\beta(s)=(g_{NN\pi}/f_\pi)m_\pi^2(m_\pi^2-s)^{-1}+\int\sigma_{ax}(M^2)M^2dM^2(M^2-s-i\epsilon)^{-1} \tag{2.6}$$

$s=0$で，（2.2）を用いて，次のサムルールを得る

$$2m_N(-G_A/G)=g_{NN\pi}/f_\pi+\int\sigma_{ax}(M^2)dM^2 \tag{2.7}$$

さて，もし，分散関係（2.6）が収束するばかりでなく，小さな s で最底次の質量を持つ項が優勢となるならば，我々は近似的ゴールドバーガー・トライマン関係を得るが，

$$2m_N(-G_A/G)\approx g_{NN\pi}/f_\pi \tag{2.8}$$

これは数パーセントの範囲内で実験と一致する。

この関係の成功は $\partial_\alpha \boldsymbol{P}_\alpha$ の他の行列要素が，1個の中間子の項によって，小さな s で優勢となるアンサブトラクテッド分散関係に従うことを暗示している。例えば，Λ と Σ の間の行列要素を我々が考えるならば次の関係に到達すべきである。

$$(m_\Lambda+m_\Sigma)(-G_A{}^{\Lambda\Sigma}/G)\approx g_{\Lambda\Sigma\pi}/f_\pi \tag{2.9}$$

これは Λ と Σ が同じパリティーを持つ場合で，反対の場合には類似の関係を持つ。

もしこのような状態が実際に得られるならば，軸性ベクトルカレントの発散に対してその点がよい近似で"一様に"結合しているということが言えるであろう。近似的にあらゆる g を計算するために，一様定数 f_π と始状態と終状態の質量の和とくりこみ因子を軸性ベクトルカレントに掛ける。

さて，保存カレントの場合にもどろう，すなわち $J=1^-$，$I=1$ という量子数を持つアイソトピックスピンカレント $\mathfrak{J}_\alpha$ にもどろう。真空に作用して，オペレーター $\mathfrak{J}_\alpha$ はいかなる安定な中間子が1個の状態をも導かないが，約750 Mev あたりで不安定なベクトル中間子状態 ρ を導き，これが 2π や 4π へ崩壊する。簡単のために，やや大きい幅（$\Gamma_\rho\sim 100\,Mev$）の ρ 状態を無視し，それを安定な状態として扱おう。不安定性からの結果の数学的複雑さはそんなにきびしいものではなく，我々は他のところで議論してきた。

そこで，(2.4) の代わりに我々は次の定義を得る

$$\langle 0|\mathfrak{J}_\alpha|\rho\rangle=m_\rho{}^2(2\gamma_\rho)^{-1}\phi_\alpha \tag{2.10}$$

ここで γ_ρ は定数で，ϕ_α は ρ 中間子の波動関数である。(2.1) や (2.3) の代りに，荷電スピンカレントの核子状態間の行列要素を考える：

$$\langle N|\mathfrak{J}_\alpha|N\rangle=\bar{u}_f i\gamma_\alpha\left(\frac{\tau}{2}\right)u_i F_1{}^V(s)+\text{磁気項} \tag{2.11}$$

ここで，$F_1{}^V(s)$ は核子の電荷のしたしみのあるアイソベクトル形状因子であり，それゆえ電磁的カレントが次の形を持つ

$$j_\alpha=\mathfrak{J}_{3\alpha}+\text{アイソスカラー項} \tag{2.12}$$

もし我々が ρ の幅を無視しつづけるならば，我々は (2.6) のような $m_\rho{}^2$ のところにポールの項を持つ分散関係を得る：

$$F_1{}^V(s)=(\gamma_{NN\rho}/\gamma_\rho)m_\rho{}^2(m_\rho{}^2-s)^{-1}+\int\sigma_1{}^V(M^2)dM^2(M^2-s-i\epsilon)^{-1} \tag{2.13}$$

ちょうど$g_{NN\pi}$が$\bar{u}_f i\tau\gamma_5 u_i$に対する$\pi$の結合定数であるように，$\gamma_{NN\rho}$は$\bar{u}_f i\tau\gamma_\alpha u_i$に対する$\rho$の結合定数である。

この場合，便宜のために，アンサブトラクテッド分散関係を用いる。

カレントが保存されるので，くりこみはなく，

$$F_1{}^V(0)=1 \tag{2.14}$$

を得るが，(2.7) の代わりにサムルール

$$1=\gamma_{\rho NN}/\gamma_\rho+\int\sigma_1{}^V(M^2)dM^2 \tag{2.15}$$

を与える。もし分散関係が小さいsでρの項が優勢ならば，そこで我々はゴールドバーガー・トライマン公式の類似式を得る：

$$1\approx\gamma_{\rho\mathrm{NN}}/\gamma_\rho$$

さて，同じ理論が他の粒子のアイソベクトル形状因子に適用されてもよい。たとえばパイオンは：

$$\langle\pi|\Im_\alpha|\pi\rangle=[i\phi_f{}^*\times\partial_\alpha\phi_i-i\partial_\alpha\phi_f{}^*\times\phi_i]F_\pi(s) \tag{2.17}$$

$$F_\pi(s)=(\gamma_{\rho\pi\pi}/\gamma_\rho)m_\rho{}^2(m_\rho{}^2-s)^{-1}+\int\sigma_\pi(M^2)dM^2M^2(M^2-s-i\epsilon)^{-1} \tag{2.18}$$

そして

$$1=\gamma_{\rho\pi\pi}/\gamma_\rho+\int\sigma_\pi(M^2)dM^2 \tag{2.19}$$

もしこの分散関係も又，小さなsでのρポールが優勢となるならば，次の関係を見出す

$$1\approx\gamma_{\rho\pi\pi}/\gamma_\rho \tag{2.20}$$

ρポールが与えるそれぞれの場合のたいていのサムルールの限界で，核子やパイオン等のアイソトピックスピンに対して一様に結合するρを持ち，その結合定数は$2\gamma_\rho$である。そのような一様性は桜井によって公理とされ，特殊相対論のわく内で，ρはヤング・ミルズ場によって記述される基礎的なベクトル中間子として扱われる。そのような場の記述が正しいかどうかは有効な一様性（$\gamma_{\rho\pi\pi}\approx\gamma_{\rho NN}\approx\gamma_{\rho KK}$等）が$\rho$の項によって，(2.15) (2.19) 等の優勢に基づいている有効性の近似則であることが理解される。

バリオンの結合パラメーター$\gamma_{\rho\pi\pi}$，$\gamma_{\rho\mathrm{NN}}$等は，例えば$\pi+\mathrm{N}\to\pi+\mathrm{N}$のような種々の散乱過程への$\rho$“ポール”の寄与から決定され得る。しかし，$\gamma_{\rho\pi\pi}/\gamma_\rho$，$\gamma_{\rho\mathrm{NN}}/\gamma_\rho$等の因子は電磁的相互作用を用いて測定される。

$\gamma_{\rho NN}/\gamma_\rho$の近似的な決定は次のように Hofstadter と Herman によって次のようになされた。

方程式（2.13）の積分の中の質量 M^2 は有効に大きく取られ，その結果（2.13）は近似的に

$$F_1^V(s) \approx (\gamma_{NN\rho}/\gamma_\rho) m_\rho^2 (m_\rho^2 - s)^{-1} + 1 - (\gamma_{\rho NN}/\gamma_\rho) \tag{2.21}$$

となる。$F_1^V(s)$ にそのような公式とともに実験データを適用し，$m_\rho \approx 750\ Mev$ を用いれば，$\gamma_{\rho NN}/\gamma_\rho \approx 1.4$ を得る（Hofstadter と Herman によれば，m_ρ の小さな値に対して 1.2 を得る）。

§c　同時交換関係

弱いカレント又は電磁的カレントの行列要素に対する分散関係は線形で同次である。例えば，方程式 (2.6) は真空と核子—反核子状態の間の $\boldsymbol{P}_a$ の行列要素に対する表現であると考えられる。右辺に，ポール項は強い相互作用によって π から $N\bar{N}$ への遷移に対する変換の振幅の掛けられた真空と中間子 1 個の状態の間の $\boldsymbol{P}_a$ 行列要素の積を含む。重さの関数 $\sigma_{ax}(M^2)$ はただ（3π と 5π 等のような）総合質量 M を持つ多くの中間状態の和である。

さて，そのような線形で同次の方程式は S のような変数についてのカレント行列要素依存関係を決定することが出来るが，しかしそれらはこれら行列要素の大きさを固定することが出来ない。すなわち，よりくわしい情報なしに計算されえない$\left(-\dfrac{G_A}{G}\right)$のような定数である。強い相互作用の場の理論は，カレントに対する明確な表現とともに，これら分散関係以上のものをどうにかこうにか含む。次のことの中に，カレントの成分の間の同時交換関係の形の中に追加された情報のいくつかを選抜しよう。これらは非線形関係なので，それら行列要素の大きさを固定することを助けうる。さらに，これらの関係はレプトン系に対して同じであろうし又，バリオン—メソン系に対しても同じであろう。その結果，例えば弱い相互作用の強さであるユニバーサリティーが意味を持ってくる。

親しみのある場合である，同時交換関係の我々の議論を始めよう—荷電スピン $\boldsymbol{I}$ の議論である。その成分 I_i はよく知られた交換関係に従う

$$[I_i, I_j] = i e_{ijk} I_k \tag{3.1}$$

荷電スピンカレントの成分 $\mathfrak{J}_{ia}$ の項において，

$$I_i = -i \int \mathfrak{J}_{i4} d^3x \tag{3.2}$$

を得て，そして保存則

$$\partial_a \mathfrak{J}_{ia} = 0 \tag{3.3}$$

を得る。これらは常に

$$\dot{I}_i = \int \partial_a \mathfrak{J}_{ia} d^3x = 0 \tag{3.4}$$

であることを我々に物語る。

さて，$\mathfrak{J}_{i4}(\boldsymbol{x},\ t)$ と $\mathfrak{J}_{j4}(\boldsymbol{x}',\ t)$ の交換関係は $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^1$ に対して，小因果律によって消滅する（我々が時間を等しく取っていることに注目しよう。）もし交換関係がデルタ関数よりもより特

異でないならば，(3.1) と (3.2) は我々に次の関係を与える

$$[\mathfrak{J}_{i4}(\boldsymbol{x},t),\ \mathfrak{J}_{j4}(\boldsymbol{x}',t)] = -ie_{ijk}\mathfrak{J}_{k4}(\boldsymbol{x},t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{3.5}$$

これは明確な交換関係によって，如何なる単純な場の理論においても得られる。

弱いカレント J_α の種々の部分を議論するときに，我々は保存されない $\boldsymbol{P}_\alpha$ のようなカレントを扱う必要があろう。ここで又，我々は $\boldsymbol{I}$ に類似する量を定義出来る：

$$D_i = -i\int P_{i4}d^3x \tag{3.6}$$

しかし，D_i は時間に独立ではない：

$$\dot{D}_i = \int \partial_\alpha P_{i\alpha}d^3x \neq 0 \tag{3.7}$$

さしあたって，カレント $\mathfrak{J}_\alpha$ と $\boldsymbol{P}_\alpha$ とオペレーター $\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{D}(t)$ に我々の注意を限定しよう。$\boldsymbol{D}$ はアイソベクトルなので，次の関係を持つ

$$[I_i, D_j] = [D_i, I_j] = ie_{ijk}D_k \tag{3.8}$$

しかし，2つの $\boldsymbol{D}$ の成分の交換関係はどうであろうか。$\boldsymbol{P}_\alpha$ が物理量で，$\boldsymbol{D}$ も又そうなので，問題は直接に物理的意味を持つものである。我々は一般的でかつ明確な答を与えよう。

一般的に，我々は D の交換関係を取ろう（i によって区別された）又，$\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{D}$ の成分の交換関係を，そしてこれらすべての（i で区別された）互いの交換関係を，交換のもとで閉じられたエルミートオペレーターの系を得るまで取ることが出来る。これらのオペレーターのどれもが N 個の線形に独立なエルミートオペレーター $R_i(t)$ の線形な結合として書かれ得る。ここで N は有限ではなく，あらゆる2つの R_i の交換関係も R_i の線形結合である，

$$[R_i(t),\ R_j(t)] = ic_{ijk}R_k(t) \tag{3.9}$$

ここで C_{ijk} は実数である。このような系は数学者によって代数と呼ばれている。もし我々が無限小ユニタリーオペレーター $1+i\epsilon R_i(t)$ の組とすべてのこれらの可能な積を考慮するならば，ユニタリー変換の N-変数連続群をうる。我々は群の代数として (3.9) を参照しうる。どんな群又はどんな代数がこの方法でカレント $\mathfrak{J}_\alpha$ と $\boldsymbol{P}_\alpha$ によって生成されるかを明確にすることは物理学的に意味のある記事である。(3.9) のような交換関係が $exp(-it\int Hd^3x)$ のようなユニタリー変換によって不変のままにされるので，数 C_{ijk} は時間に独立である。

2番目の数学的記述は又妥当である。すなわち，群又は代数のもとでのハミルトニアン密度 $H(\boldsymbol{x},\ t)$ の変換性の明確さである。$[R_i(t),\ H(\boldsymbol{x},t)] = 0$ に対するこれら R_i は時間に独立であるがしかし D_i のような，それらのいくつかは H とは交換しない。もしすべての R_i が H と交換するならば，H は群のささいな一次元表現に属する。事実，H はより複雑な様子でふるまう。すべての $R_i(t)$ と $H(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{t})$ の交換によって，H を含むオペレーターの線形な組を得て，それが群の表現を形成し，それは既約表現の直和となる。我々はそこで，$\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{D}$ によってどんな群が

生成されるかを知りたい。そして，群Hのどんな既約表現に属するかを知りたい。両方の疑問に対する明確な答が暗示されるであろう。

レプトンに対するベクトルと軸性ベクトルの弱いカレントを見よう。さしあたって，μは無視してνとeのみを考えよう。(同様に，この章でストレンジ粒子を無視して$S=0$のバリオンとメソンのみを考えよう。) ベクトルの弱いカレント$i\bar{\nu}\gamma_\alpha e$と軸性カレント$i\bar{\nu}\gamma_\alpha\gamma_5 e$はレプトンに対する次の2つの“アイソトピックベクトル”カレントの成分であると形式的にみなされる，

$$\mathfrak{J}_\alpha{}^{(l)}=i\bar{\xi}\boldsymbol{\tau}\gamma_\alpha\xi/2,\quad \boldsymbol{P}_\alpha{}^{(l)}=i\bar{\xi}\boldsymbol{\tau}\gamma_\alpha\gamma_5\xi/2 \tag{3.10}$$

ここで，ξは (ν, e) を表わす。我々は又$\boldsymbol{I}$と$\boldsymbol{D}$の数学的類似式を次のように形成しうる

$$\boldsymbol{I}^{(l)}=-i\int\mathfrak{J}_\alpha{}^{(l)}d^3x,\quad \boldsymbol{D}^{(l)}=-i\int\boldsymbol{P}_\alpha{}^{(l)}d^3x \tag{3.11}$$

さて，このレプトンの場合において，簡単に$\boldsymbol{I}^{(l)}$と$\boldsymbol{D}^{(l)}$の交換関係を計算しよう

$$[I_i{}^{(l)}, I_j{}^{(l)}]=ie_{ijk}I_k{}^{(l)},\quad [I_i{}^{(l)}, D_j{}^{(l)}]=[D_i{}^{(l)}, I_j{}^{(l)}]=ie_{ijk}D_k{}^{(l)},\quad [D_i{}^{(l)}, D_j{}^{(l)}]=ie_{ijk}I_k{}^{(l)} \tag{3.12}$$

これら交換則を言い表わす他の方法は，

$$\boldsymbol{I}^{(l)}=\boldsymbol{I}_+{}^{(l)}+\boldsymbol{I}_-{}^{(l)},\quad \boldsymbol{D}^{(l)}=\boldsymbol{I}_+{}^{(l)}-\boldsymbol{I}_-{}^{(l)} \tag{3.13}$$

とおくことであり又，$\boldsymbol{I}_+{}^{(l)}$と$\boldsymbol{I}_-{}^{(l)}$は2つの交換する角運動量である〔本質的に，$\boldsymbol{\tau}(1+\gamma_5)/4$, $\boldsymbol{\tau}(1-\gamma_5)/4$である〕。弱いカレント$i\bar{\nu}\gamma_\alpha(1+\gamma_5)e$は$\boldsymbol{I}_+{}^{(l)}$カレントの成分にすぎない。

今，$\boldsymbol{I}$と$\boldsymbol{D}$の代数的機構は，バリオンとメソンの場合に正確に同じである。(3.1) と (3.8) に対して

$$[D_i, D_j]=ie_{ijk}I_k \tag{3.14}$$

という法則を加えよう，そしてこの法則は系を閉じており，$\boldsymbol{I}^+=\dfrac{(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D})}{2}$と$\boldsymbol{I}^-=\dfrac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})}{2}$を2つの交換する角運動量とする。再び，弱いカレントを$\boldsymbol{I}^+$カレントの成分とする。明らかに$\dfrac{(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D})}{2}$は角運動量で，角運動量にいくつかの因子をかけたものではないという記事は弱いカレントの大きさを決定する。それはバリオンとレプトンの間の一様性の強さを意味あるものにし，それは又，分散関係とともに$\left(-\dfrac{G_A}{G}\right)$のような常数の値を明確にする。

バリオンとメソンの場の理論のモデルの中での議論のもとに代数的構造を実現するに最も簡単な方法は，$\mathfrak{J}_\alpha{}^{(l)}$と$\boldsymbol{P}_\alpha{}^{(l)}$が$\nu$と$e$場から作られるのと同様に$p$と$n$から次のように$\mathfrak{J}_\alpha$と$\boldsymbol{P}_\alpha$カレントを構成することである

$$\mathfrak{J}_\alpha=i\bar{N}\boldsymbol{\tau}\gamma_\alpha N/2,\quad \boldsymbol{P}_\alpha=i\bar{N}\boldsymbol{\tau}\gamma_\alpha\gamma_5 N/2 \tag{3.15}$$

ここでNは (p, n) を意味する。我々はそこで，(3.1) と (3.8) と (3.14) の交換則を得るばかりでなく，より強力な (3.5) とその類似式を得る

$$
\begin{aligned}
[\mathfrak{J}_{i4}(\boldsymbol{x},t),\ P_{j4}(\boldsymbol{x}',t)] &= -ie_{ijk}P_{k4}(\boldsymbol{x},t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\
[P_{i4}(\boldsymbol{x},t),\ P_{j4}(\boldsymbol{x}',t)] &= -ie_{ijk}\mathfrak{J}_{k4}(\boldsymbol{x},t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

§d　対称坂田モデルとユニタリー対称性

強い相互作用をする粒子の弱いカレントは次のような表現になることを仮定することが企てられている

$$i\bar{p}\gamma_\alpha(1+\gamma_5)n+i\bar{p}\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\Lambda \tag{4.1}$$

これはレプトニック弱いカレント $J_\alpha^{(l)}$ に対する方程式 (1.2) に類似している。さて，(4.1) は確かにバリオンとメソンの弱いカレントに対して質的に無理のない表現である。

Okun が強調したように，次の弱い相互作用の性質は，公理として時には導入され，(1.1) と、(1.2) と (4.1) から得られる。

(イ)保存ベクトルカレント。フェルミとヤングのモデルとして議論されているモデルにおいて，$i\bar{p}\gamma_\alpha n$ は総合アイソトピックカレントの要素である。

(ロ)$|\Delta S|=1$，$\Delta S/\Delta Q=+1$ そして$|\Delta I|=\dfrac{1}{2}$ である。

(ハ)$\Delta S=0$ の弱いカレントの GP 変換のもとでの不変。

(p, n, Λ) の変換性は，2×2の3つの行列によって成生され，行列 τ_1, τ_2, τ_3 のトレースがゼロのパウリアイソトピックスピン行列であり，無限小変換として次の式を得る

$$N\rightarrow(1+i\sum_{i=1}^{3}\delta\theta_k\tau_k/2)N \tag{4.2}$$

すべてのこの変換のもとでの対称性はアイソトピックスピン回転のもとでの対称性と同じである。アイソトピック理論のすべての形式主義はダブレット又はスピノール (p, n) の変換性を考えることによって構成されうるし，2つ又はもっと多くの核子（又は反核子）の結合のような変換をするより複雑な変換性を考えることによって構成される。

パウリ行列はエルミートで，次の法則に従う

$$
\begin{aligned}
&Tr\tau_i\tau_j=2\delta_{ij} \\
&[\tau_i,\ \tau_j]=2ie_{ijk}\tau_k \\
&\{\tau_i,\ \tau_j\}=2\delta_{ij}1
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

このパウリ行列によるアイソトピックスピン回転群 $SU(2)$ のもとでの不変は，アイソトピックスピンカレントの保存に対応する

$$\mathfrak{J}_\alpha=i\bar{N}\boldsymbol{\tau}\gamma_\alpha N/2$$

3番目の場 Λ を含めることによってスピノール (p, n) を一般化しよう。これら3×3のトレースがゼロの8個の行列はユニタリー・ユニモデュラー群 $SU(3)$ と呼ばれ，2×2行列との類似によって，次の性質を持っている

$$
\begin{aligned}
&Tr\lambda_i\lambda_j=2\delta_{ij}\\
&[\lambda_i, \lambda_j]=2if_{ijk}\lambda_k\\
&\{\lambda_i, \lambda_j\}=2d_{ijk}\lambda_k+\frac{4}{3}\delta_{ij}\mathbf{1}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

この$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_8$行列は表Ⅰに示されている。ここで$f_{ijk}$は実で，方程式（4.3）の$e_{ijk}$のように

表Ⅰ

$$
\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad
\lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad
\lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}
$$

$$
\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad
\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}\quad
\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}
$$

$$
\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\quad
\lambda_8=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\0&0&-\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}
$$

表Ⅱ

$i\ j\ k$	f_{ijk}	$i\ j\ k$	d_{ijk}
123	1	118	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
147	$\frac{1}{2}$	146	$\frac{1}{2}$
156	$-\frac{1}{2}$	157	$\frac{1}{2}$
246	$\frac{1}{2}$	228	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
257	$\frac{1}{2}$	247	$-\frac{1}{2}$
345	$\frac{1}{2}$	256	$\frac{1}{2}$
367	$-\frac{1}{2}$	338	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
458	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	344	$\frac{1}{2}$
678	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	355	$\frac{1}{2}$
		366	$-\frac{1}{2}$
		377	$-\frac{1}{2}$
		448	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
		558	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
		668	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
		778	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
		888	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

全体で反対称であり，一方 d_{ijk} は実で，全体で対称である。もちろん，(p, n, Λ) の無限小変換は

$$b \rightarrow (1+\sum_{i=1}^{8}\delta\theta_i\lambda_i/2)b \tag{4.5}$$

のように示され，f_{ijk} と d_{ijk} の値は表IIに示されている。

§e　ベクトルと軸性ベクトルカレント

我々は9番目の3×3行列が次のように

$$\lambda_0=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1} \tag{5.1}$$

と定義されるならば，バリオンカレントとユニタリースピンカレントの数学的取り扱いを統一出来，その結果9つの行列 λ_i は次の規則に従う

$$\begin{aligned}&[\lambda_i, \lambda_j]=2if_{ijk}\lambda_k \quad (i=0, \cdots\cdots, 8)\\&\{\lambda_i, \lambda_j\}=2d_{ijk}\lambda_k \quad (i=0, \cdots\cdots, 8)\\&Tr\lambda_i\lambda_j=2\delta_{ij} \quad (i=0, \cdots\cdots, 8)\end{aligned} \tag{5.2}$$

ここで f_{ijk} があらゆる添数字が消滅する場合以外は以前のように定義され，d_{ijk} はあらゆる添数字がゼロで，他の2つの添数字が等しいときはいつでも $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ に等しくなる付加的なゼロでない行列を持つということ以外は表Iのように定義される。

§f　対称性の破れ—メソン多重項

我々は荷電スピン保存のためにバリオンとメソンはそれぞれが荷電スピン代数 (3.1) の既約表現に対応する縮退した荷電多重項を形成することを知っている。それぞれの多重項は $2I+1$ の成分を持ち，ここで量子数 I はある表現と，他の表現とを区別する荷電スピン群のすべての要素と交換する $\sum_{i=1}^{3}I_i^2$ というオペレーターの固有値 $I(I+1)$ を我々に与える。多重項の範囲内でオペレーター I_i は代数の交換則 (3.1) を持つ $(2I+1)\times(2I+1)$ エルミート行列によって表わされる。

もし我々がダブレット表現から出発するならば，他のすべてをもとのダブレットのように変換する粒子の結合を考えることによって作ることが出来る。

さてもし核子と反核子を一緒にするならば，次の結合を形成する。

$$\bar{N}N=\bar{p}p+\bar{n}n$$

これは荷電シングレットのように変換し，次の結合

$$\bar{N}\tau_i N \qquad (i=1, 2, 3)$$

は荷電トリプレットを形成する。核子と反核子のダブレットの直積は我々にシングレットとトリプレットを与える。核子と反核子を仮想的に解離するあらゆる中間子はシングレットとトリプレットのはずである。

さて，ユニタリースピンと3つの基本的バリオン (p, n, Λ) を考慮に入れるとき，同様に一般化してゆこう。この (p, n, Λ) を b と書くとき，例えば b と $\bar{b}$を解離する中間子を考えよう。それは，ユニタリーシングレットのように

$$\bar{b}b=\bar{p}p+\bar{n}n+\bar{\Lambda}\Lambda$$

と変換するか，ユニタリーオクテット

$$\bar{b}\lambda_i b \qquad (i=1, \cdots\cdots, 8)$$

のように変換する。

ユニタリーシングレットは明らかに中性であり，奇妙さ $S=0$ を持つ。そして，荷電シングレットを形成する。しかしどのようにして，ユニタリーオクテットは荷電スピンに関して振る舞うのだろうか。我々は次の結合を形成しよう

$$\left.\begin{array}{l}\bar{b}(\lambda_1-i\lambda_2)b/2=\bar{n}p\\ \bar{b}\lambda_3 b/2=(\bar{p}p-\bar{n}n)/\sqrt{2}\\ \bar{b}(\lambda_1+i\lambda_2)b/2=\bar{p}n\end{array}\right\}\quad I=1,\ S=0$$
$$\left.\begin{array}{l}\bar{b}(\lambda_4-i\lambda_5)b/2=\bar{\Lambda}p\\ \bar{b}(\lambda_6-i\lambda_7)b/2=\bar{\Lambda}n\end{array}\right\}\quad I=\frac{1}{2},\ S=+1 \qquad (6.1)$$
$$\left.\begin{array}{l}\bar{b}(\lambda_4+i\lambda_5)b/2=\bar{p}\Lambda\\ \bar{b}(\lambda_6+i\lambda_7)b/2=\bar{n}\Lambda\end{array}\right\}\quad I=\frac{1}{2},\ S=-1$$
$$\bar{b}\lambda_8 b/\sqrt{2}=(\bar{p}p+\bar{n}n-2\bar{\Lambda}\Lambda)/\sqrt{6} \qquad I=0,\ S=0$$

このように，ユニタリーオクテットは $S=0$ の荷電トリプレットを含み，対になっている $S=\pm 1$ を持つダブレットを含み，$S=0$ を持つ荷電シングレットを含む。

§g　対称性の破れ—バリオン超多重項

ユニタリースピン代数又は $SU(3)$ の3次元表現を考えた。それは b に属し，記号 **3** によって表わされうる表現である。

反バリオン $\bar{b}$は共役な表現 $\mathbf{3}^*$ に属し，これは **3** とは同じではない。そこで直積 $\mathbf{3}\times\mathbf{3}^*$ を取り，次の規則で与えられることを見出す

$$\mathbf{3}\times\mathbf{3}^*=\mathbf{8}+\mathbf{1} \qquad (7.1)$$

ここで **8** はユニタリースピンのオクテット表現で，**1** はシングレット表現である。

さて，$$\mathbf{3}\times\mathbf{3}\times\mathbf{3}^*=\mathbf{3}\times\mathbf{1}+\mathbf{3}\times\mathbf{8}=\mathbf{3}+\mathbf{3}+\mathbf{6}+\mathbf{15} \qquad (7.2)$$

を考えよう。

6次元表現 **6** は $S=-1$ を持つ荷電トリプレット，$S=0$ を持つダブレット，$S=+1$ のシングレットによって構成されるし又，15次元表現 **15** は $S=-2$ をもつダブレットと $S=-1$ のシ

ングレットとトリプレットそして$S=0$のダブレットとクアルテットそして$S=+1$のトリプレットによって構成される。

Ξは**15**に属するが，どこに超多重項の他のメンバーがあるのか。$S=-1$と$S=0$に対して，多くのよく知られた共鳴があり，それらのいくつかはΞと同じスピン・パリティーを気やすく持つ。

1つの奇妙な可能性は，基本的な対称性bがかくされ，物理的NとΛが**3**に属するかわりに，ユニタリー対称性の極限において，ΣがΞと一緒に**15**次元表現に属することである。それはN, Λ, Σ, Ξのスピンとパリティーが等しいことを要求する。

§h　エイトフオールド・ウエイ

もし我々が対称坂田モデルを放棄して，ユニタリー対称性を抽象的に扱うならば，ユニタリー対称性はより興味をそそる方法で応用されうる（もし“基本的”バリオンとメソンが存在しないならば，抽象的な接近が要求される。）ベクトルウィークカレントによって一般化されうるすべての群の中で，$SU(3)$はなお最小の群であり，自然に$|\Delta I|=\frac{1}{2}$と$\Delta S/\Delta Q=0$，$+1$則を生ずる。

バリオンとそれらの反粒子の結合のように変換する中間子を形成するために直積$\mathbf{8}\times\mathbf{8}$を縮約するそして，

$$\mathbf{8}\times\mathbf{8}=\mathbf{1}+\mathbf{8}+\mathbf{8}+\mathbf{10}+\mathbf{10}^*+\mathbf{27} \tag{8.1}$$

をうるが，ここで**1**と**8**はすでに議論したシングレットとオクテットの表現である。**10**は$Y=0$の荷電3重項と，$Y=-1$の2重項，$Y=+1$の4重項，$Y=-2$のシングレットによって構成され，**27**は$Y=0$の荷電シングレット，3重項，5重項と，$Y=\pm1$の2重項の対，$Y=\pm1$の4重項の対，$Y=\pm2$の3重項の対によって構成されている。ここでYはハイパーチャージである。明らかに知られた中間子は§fでのようにオクテット又はシングレットと定められる。メソンと核子の散乱共鳴は（8.1）の中で定められた表現であるはずである。

参考文献

I　Chris Quigg “Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions” The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.

II　Murray Gell-Mann “Symmetries of Baryons and Mesons” Physical Review Vol. 125, No. 3, p. 1067, February 1, 1962.

（原稿受理　1988年11月28日）