

軌道の安定性

宮本道子

Summary

Orbit Stability

Michiko Miyamoto

It is only necessary to have a knowledge of the field-vs-radius which is valid over the small range of equilibrium orbit necessary to encompass these betatron oscillations. This can be obtained by use of the field index n , which is defined as the negative of the ratio of the fractional change in field associated with any fractional change in radius. Thus

$$n = -\frac{\frac{dB}{B}}{\frac{d\gamma}{\gamma}} \quad (1)$$

This expression can be written in the form

$$B = \frac{K}{\gamma^n} \quad (2)$$

$K = \text{constant}$.

We must inquire into the necessary condition for radial stability. A circular equilibrium orbit is determined by the equality

$$\frac{Mv^2}{\gamma} = qvB \quad (3)$$

and by eq (2), we get

$$\frac{Mv^2}{\gamma} = qv \frac{K}{\gamma^n} \quad (4)$$

and if $n < 1$, we get radial stability. The reason is shown in Fig 5 (b).

As is indicated in Fig 3 by the arrows, the force which acts on the projectiles is wholly radial and directed towards the axis in the mid-plane, but for particles traveling above or below this plane, the forces have components which drive the ions back towards the mid-plane. So, if the field decreases radially as occurs if $n > 0$, axial stability will exist.

Recapitulating, axial stability is obtained if n lies between 0 and $+\infty$, while radial stability occurs if n lies between $-\infty$ and $+1$. So, stability in both directions can be obtained simultaneously only if n lies between 0 and $+1$.

JOHN J. LIVINGOOD 博士による “PRINCIPLES OF CYCLIC PARTICLE ACCELERATORS” の ‘軌道の安定性’ という題目の第2章をまとめてみました。

§ 1 序 論

磁気的に導かれる加速器中の粒子は、最終エネルギーに到達するまでに小さなサイクロotron 中での100フィートから、大変大きなシンクロトン中での4, 50万フィートに到る長い道のりを走る。望まれる方向に、あまり正確すぎて導かれずにこの距離を走り、そして説明の付かない気体原子との多数回の反らせる衝突にもほとんどみまわれずにこの距離を走るように、どんな発射物も発射されない。最も遠くコースを反れた粒子に補正の操縦力が最も強く適用されなければならず、仕組みは自動的でなければならないのは、個々のイオンの軌道を保つことは不可能であるばかりでなく、軌道において同じ方位でのそれらのすべては同じ調節を必要としないからである。補正が上、下と左、右の偏差に対してなされなければならないのは、イオンがひとたび dees の表面又は真空箱の壁にぶつかると、それらは消滅するからである。

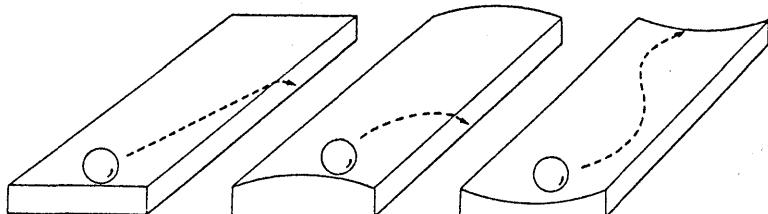


Fig. 1 中性の不安定又は安定な軌道を生ずる力の系を類似するボーリング球戯器

ボーリングの球戯場 (Fig.1) を考えてみよう。本当に平らな表面はだめで、凸状のものも又不可能である。しかし、もしボーリングの通りみちが凹んでいるならば、融通がきく。なぜならボールは右と左に振動し、それでもなお減速せずに前進するからである。加速器の磁場が凹状に型取られているので、粒子を加速設備へくりかえしてもどし、それらの軌道に影響するばかりでなく、方向を間違えたイオンは望ましい軌道のまわりを前進したり後退したりして、左

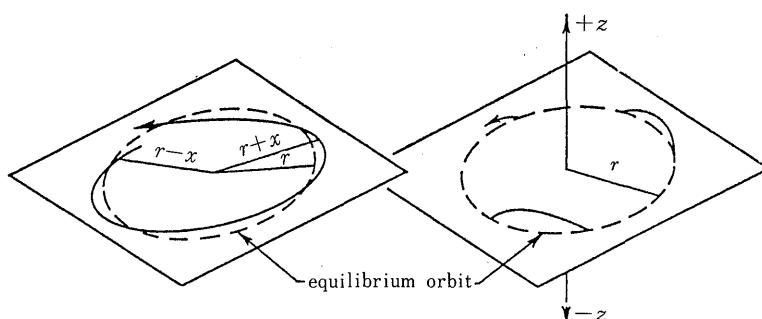


Fig. 2 円形平衡軌道のまわりのベータートロン振動の図解表現。放射運動は磁場の真ん中の平面に起こされているのが示され、又一方、軸方向の運動は円筒表面上に示されている。実際に両運動は同時に起こる。弱集中機械を用いると、それぞれの一周期に一振動より少ないので常である。

右だけでなく、上、下にも振動する。軌道はそれゆえ、2次元の安定性を持つようにされている。

そのまわりに偏差が生ずる、乱されない道筋は平衡軌道として知られている。それは、固定されたエネルギーの平衡軌道と結びつけて考えられ、軌道はそれ自身について閉じている。このために、それは時には閉じられた軌道として参照される。

Fig. 2 に示されているように、円筒座標が用いられているが、磁場の対称軸は、両極の間の空間の真ん中の平面にある平衡軌道に垂直である。真ん中の平面に生起する運動は形容詞を与えると、放射的である。(又はときには水平、たいていの加速器中でそうであるが、すべての加速器中ではないが、この平面は水平である)。磁場の軸に平行な運動は、軸的又は縦方向であると呼ばれる。我々は軸方向一放射方向という用語を採用し、 $\pm z$ で真ん中の平面の一方と、その逆方向の偏差を測り、 $\pm x$ で、平衡軌道の外側又は内側への偏差を示す。解析の簡単のために、2つの運動は独立であるとみなし、すなわち、軸方向の運動は真ん中の平面の中で全部起こると考える。実際上もちろん、両運動は同時に起こりうる。

ある加速器中では、場に拘束されない領域があり、まっすぐな区域、あるいは簡単に磁気の分配のまっすぐな部分と呼ばれているので、平衡軌道は接線によって結ばれる曲線の連続である。それぞれの軌道の曲線の分配に対して、別々の軸を用いて、多重円筒幾何学がそこで使われる。そのような場合において、局所的円筒の半径、すなわち機械の中心からの閉じられた軌道までの変化する距離に関して、もうすぐ出合うような、どんな“場の放射従属”も特に意味がなく、まれに計算の中にあらわれる。

閉じられた軌道のまわりに振動する運動はベータートロン振動として知られ、振動数と振幅の管理は加速器のデザインの主な問題を構成している。2つの一般的な方法が用いられ、初期には弱集中として知られ、後の開発は強集中と呼ばれている。これらの技術は、時には一定勾配 (CG) 集中と変化勾配 (AG) 集中として、それぞれ知られていて、“一定”と“変化”という言葉は、磁場の放射的勾配が一定の値を保つか又は、他方は方位角が変化するときに、磁場がゼロでない領域で任意に与えられた半径で符号を変える。しかしながら、広い用法としては、CG と AG という用語はうまくいっている選択とは言えないのは、多くの微妙な例外と変化があるからである。ある CG 機械は実際に異なる値の勾配を採用し、ある AG 加速器においては勾配は符号を変えるばかりでなく、大きさも変える。強集中の研究はこの本の後の部分することにし、今は注意を弱集中の越に向けることにする。

§2 場の指數

弱集中力は増加する半径とともに、わずかに減少する磁場を用いて §3 において得られるようになる。この等高線を平らで平行な極面を用いて、近似的にギャップの外へある距離だけ延長されている場の傾きが獲得し、増加する半径とともに、場の弱まりを引き起こす。軸的集中の重要性は、建築中のサイクロトロンにおける初期の実験期から定性的な方法においてはっきりと理解される。アルキメデスが浮力の原理を紹介するずっと以前に多くの船が航海した

ように、この定量的な解析と放射的運動への場の影響の詳細な認識をたくさんのサイクロトロンが建設されて、うまく用いられてから数年間はしなかった。軌道の安定性の完全な理論が、今もなお存在するすべての初期の困難の中で発展してきたのであれば、誰もサイクロトロンを建設する勇気を与えられなかっただろうということがいえる。一方、正しく形作られた場から得られる報いは大変誘惑的なので、初期の理論は急速な進歩どころか、軽率であるという議論がなされうる。

加速器の極の間の真ん中の平面で、磁場の強さが半径とともに変化する方法は、一般的にはどんな簡単な関数関係によっても記述されえない。しかしながら、放射方向のベータトロン振動振幅はまさしく小さいということが、実際に知られている。それゆえ、場とこれら運動を関連させるために、これら振動を含むに必要な半径の小さな範囲にわたって変化する場と半径の関係の知識を持つことのみが必要である。これは、半径の任意のわずかな変化と関連する場のわずかな変化の比の負符号として定義される。このように、

$$n = -\frac{\frac{dB}{B}}{\frac{d\gamma}{\gamma}} \quad (1)$$

である。これは又、次のようにも書かれる。

$$n = -\frac{d \ln B}{d \ln \gamma} \quad (2)$$

負符号の導入は正の指數を、増加する半径とともに減少する弱集中場に与えるために、単純に慣例的なものであり、それ故勾配 $\frac{dB}{d\gamma}$ は本質的に負である。

例えば、半径 γ で場が B であり、又もしそれが 1% 大きくなつたところで $1/2\%$ 縮小されるならば、 $\frac{dB}{B} = -0.005$ で、 $\frac{d\gamma}{\gamma} = 0.01$ であり、そして γ の近所の指數は 0.5 という値を持つ。逆にもし我々が、場が B である半径 γ のところの n を知るならば、半径変化 $d\gamma$ は $dB = -nB \frac{d\gamma}{\gamma}$ で与えられる場の変化の原因となる。 γ の特別なある値に集中される放射的ベータトロン振動によって受け入れられる放射的な範囲にわたって、指數は一定であると考えられ、振動の特性は基準的に計算される。異なる半径では n は異なる値を持ち、再び一定になる。

n を一定にした場が、 B_1 と B である γ_1 と γ の間の eq(1) の積分によって、次の式を得る。

$$B = B_1 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma} \right)^n \quad (3)$$

ここで γ_1 は場が B_1 であるところでのあらゆる参照半径であり、一方、 B は指數が有意に変化しない空間にわたる γ に十分近い半径 γ での場である。この表現は次の形に書かれる。

$$B = \frac{K}{\gamma^n} \quad (4)$$

ここで、 $K = B_1 \gamma_1^n$ は定数である。このことは、場が限定された範囲にわたって、半径の n 番目の幕、おそらく γ のひどく異なる値に関連する n の新しい値に、逆比例すると考えられること

を示している。この表現から、もし $n > 0$ ならば、増加する半径によって場が弱められることは明らかであり、一方、 $n < 0$ であれば、逆の状態が記述される。一定な場は $n = 0$ によって表わされる。

ベータートロン振動の研究において、参照半径 γ_0 とそれに関連する場 B_0 は、平衡軌道の半径 γ_0 と場 B_0 と解釈され、一方、変化しつつある半径 γ を持つ非平衡軌道に従う粒子の放射的変化は、 $x = \gamma - \gamma_0$ であらわされる。

サイクロトロンやシンクロトロンにおいて、場 B は増加する半径 γ とともに下がるが、 γ が大きく増加する間に、その中心の値から数%下がるものなので、 $B\gamma$ の値は γ とともに増加する。究極的に極の端に近づくと、 B は γ の増加よりもはやく下がるので、 $B\gamma$ は最高値を過ぎると減少はじめる。この最高値が生ずる半径で、磁石は最大の運動量のイオンを保持する。

さて、これらの機械の中で、我々が外側へ移動するとき、 n に何が起こるか考えよう。極の軸でゼロのところからそれは出発するが、なぜなら対称性から、その勾配はゼロだからである。 γ が増加するとき、 B は少し下がり、 $\frac{dB}{d\gamma}$ は小さな負の値を獲得するので、はじめは非常に徐々に、しかし極の端に近づくとき、 B の険しい降下と関連する勾配の増加のために、急激に n は上がり始める。 $B\gamma$ が最高値に達する半径で指数は 1 という値を通過することが、次のように簡単に示される。

$$\frac{d(B\gamma)}{d\gamma} = B + \gamma \frac{dB}{d\gamma} = 0$$

$eq(1)$ から、 $n = -\frac{dB}{B(d\gamma)}$ なので、 $B - nB = 0$ 又は $n = 1$ である。もうすぐ、 $n = 0$ から $n = 1$ のすべての領域で、軌道の安定性の要求が満たされることを知り（それゆえ、もしイオンがいくらか道筋から反れていても、それはそのるべき場所へもどろうとする傾向を持つ）、そして結果として、一見したところ最大の運動量の粒子が、すなわち最大エネルギーの粒子が $n = 1$ のところまで外側の方にそれらを加速することによって得られるようにみえる。最も不運なことは、これが実用的でない理由がある。一定の振動数のサイクロトロンにおいては、もしこの最終エネルギーが増えつつある相対論的質量を持つイオンが減速されるような dees 間の固定された振動数に関する電圧を持つ位相まではそっと動いてしまわず、ほとんど無回転で得られるならば、完全に手に負えない大きさの dee 電圧を適用することが必要であろう。サイクロトロンで普通に到達する最大の半径は、 $n = 0.3$ 又はそのあたりに対応し、発射物はその点で発射される。シンクロサイクロトロンを用いると、災害的な軸方向のビームの広がりが、 $n = 0.2$ で起こる；粒子は dees の表面へかりたてられるので、それらはこの大変動が起こる寸前に用いられる。よいシンクロサイクロトロン磁石のデザインは、その中で到達しうる可能な半径が $n = 0.2$ のものである；普通には、これはほぼギャップの高さに等しい極の端からの距離であるが、しかしながら周辺への正しい接近は鋼鉄の特殊な構成によって得られる。

サイクロトロンとシンクロトロン中の異なる半径での n の管理は、磁石の極の間の空間のギャップを変えることによってなされる。限界の範囲内で、適当な値が鉄を通る磁束の流れの線をつらねることによって計算されうるし、又考慮に入れている特殊な鋼鉄に対する磁束

の流れの密度の関数として、透磁率の表にした値を利用する。より一般的に、適当な半径における極の端の変化する等高線によって、縮尺されたモデルと完全な大きさの磁石の両方に実験に基づく補正がなされる。創作者にならって、バラの輪と呼ばれるリングは、円筒の極の平らな平面に取りつけられた鉄を無効にする。もし周辺近くに置かれたならば、それらは場の降下の究極的な速度を後まわしにし、そしてそのために n をより低い値に保つ。半径の変化する鉄の薄い板は、対称的に極の軸上に整列され、それらがなければ、ほとんど一様な場である中心領域中にゆるやかな勾配を起こすのに用いられる。

このように生じた極面の特別な等高線は、もし磁束線の密度が大変小さいので、場の範囲にわたって、透磁率が一定であるのみならば、いろいろな場の水準で、場の特殊な等高線をつくり出すということに注意することが重要である。経済的な理由で、これは大変稀な場合である；高磁場、高磁束密度で働く加速器のデザイナーは、ほとんどがお金のためである。その結果として、選ばれた極面等高線は、一つの平均場強度においてのみ正しい。人はサイクロトロンをかなり低い磁場で操作したいと望むのだが、磁石を用いるいろいろな領域で、透磁率が変化するので、異なる磁極等高線は、同じ場の形をするように要求される。

ベータートロンやサイクロトロン中で、加速過程の間に磁場が上昇するときに、後で知るように、場の指数は一定の値にその間中とどまることが高度に期待される。 $\text{eq}(1)$ によって、我々は $n = -\gamma \frac{dB}{(Bd\gamma)}$ を得るので、もし勾配 $\frac{dB}{d\gamma}$ が B と同じ速さで増加するならば、振動する磁場による加速器の中で、 γ は固定されているので、 n は結果的に一定値を取る。 n が一定値を取ると仮定するにか理由が存在するかどうかが分かる状況を吟味しよう。磁束密度にかかわりなく、鉄の透磁率 μ が一定であると仮定しよう（それは実際に正しいであろう！）。この単純な観点と調和して、我々はギャップの有効領域 A が磁束の道筋に垂直な鉄の領域に等しいと仮定しよう。そうすれば、我々は基本的な方法で次のように書ける。

$$BA = \frac{\text{磁力}}{\text{リラクタンス}} = \frac{NI}{L/(\mu\mu_0 A) + G/(\mu_0 A)}$$

ここで L は鉄中の磁力線の長さで、すべての線が一定の長さと仮定され、 G は極間のギャップの高さ、 NI は励磁コイルのアンペール・ターンの数で、 μ_0 は空間の透磁率、 μ は鉄の相対透磁率である。そこで、

$$B = \frac{\mu_0 NI}{(L/\mu) + G} = \frac{CI}{D+G}$$

ここで、 C と D は与えられた磁石に与えられる定数である。さて、真空箱の内部と外部の境界を下つきの 1 と 2 と書こう。それゆえ、

$$\frac{dB}{d\gamma} = \frac{B_2 - B_1}{\gamma_2 - \gamma_1} = \left(\frac{CI}{D+G_2} \right) \left(\frac{1}{D+G_2} - \frac{1}{D+G_1} \right)$$

$\text{eq}(1)$ において、我々は $n = -\gamma \frac{dB}{(Bd\gamma)}$ を得たが、場 B はその近傍の n が一定である名目上の半径での値である。この B に対して我々が取る当面の例は、箱を中間で横切る値であり、ギャップの高さは $\frac{1}{2}(G_1 + G_2)$ である。それゆえ、

$$n = -\gamma \left(\frac{D + \frac{1}{2}(G_1 + G_2)}{CI} \right) \left(\frac{CI}{\gamma - n} \right) \left(\frac{1}{D+G_2} - \frac{1}{D+G_1} \right)$$

電流 I が約されるので、 n は定数のパラメーターのみによっており、 それ故任意の場の強さで一定である。

最もおそまつなことに、 すべての線の道筋の長さは一定ではなく、 透磁率も磁束密度とともに変化するので、 仮定は最も未熟な方法でのみ保たれている； このように結果は近似的であるのみである。しかし、 一定の指数はパルス場による加速器に対しては大変本質的なので、 極面のかしこい形成や、 いろいろなくびき状の部分における鉄の量の変化によって、 望ましい手法で場がふるまうようにすることを試みることは価値あることである。これは多年にわたってなされる仕事となり、 鉄が透磁するようにかりたてられれば、 かりたてられるほど、 すなわち、 望まれる場の最高点が高くなればなるほど、 もっと困難になる主たる実験的、 計算的努力である。問題は、 先のパルスから繰り延べられた残余の場によって、 又鉄中のうず巻き電流がひずんだ場をつくるという事実によって、 さらに複雑になる。パルス磁石が鉄の薄板によって作られていたとしても、 うず巻き電流は誘導場の低い値でおやっかいなので、 磁石のデザイナーは薄板の部厚さと場の上昇時間を考慮に入れなければならない。

固定された指数を持つという助けは、 加速周期じゅう異なる角度に放射能を与える極面の巻き方のような力学的方法によって、 しばしば獲得されねばならない。これらは、 異なる半径で極面に取りつけられた伝導体の輪によって構成されている。それらは場の局所的変化の原因となり、 又改められた勾配を引き起こす。その範囲内の磁束の立ち上がりが変化に対抗する電流の傾向を引き起こすので、 受動的な閉じられた輪は、 “はねかえり場” をつくる。能動的な輪は、 プログラムされた発生機によって、 “はねかえす” か “後押しする” ように動かされるか又は、 ある場所の大きなはねかえす輪は、 もう一方の場所のより小さい後押し回路を動かす。

§ 3 軌道の質的安定性

弱集中加速器における磁場は極の端に近づくときに減少することはすでに述べてきたことである。この条件に伴って起こることは、 場の磁力線の曲率である——場が、 両極の間の対称な真ん中の平面に垂直に残っているにもかかわらず外側へふくらむ。この場の減少とふくらみは半径が増加するときに極の間の距離が増加することによって大きくされる。発射物に作用する力は場とイオンの速度に垂直である。矢印で Fig.3 に示されているように、 真ん中の平面上の力は全く放射的で軸の方向に向かっているが、 しかし、 この平面の上方又は下方へ動く粒子に対して、 力は真ん中の平面へイオンをもどす力を持つ。転じて円形軌道の原因となる放射的な力をつくるのは軸方向の場の成分であり、 軸的集中力を与えるのは場の放射的成分である。それゆえ、 もし $n > 0$ ならば垂直な安定性が生ずるように、 もし場が放射方向に減少しているならば、 イオンの軌道は真ん中の平面の上、 下に振動する。このことが最初に、 ベータートロン加速器との関連において記述されたので、 そのような運動は軸方向ベータートロン振動と呼ば

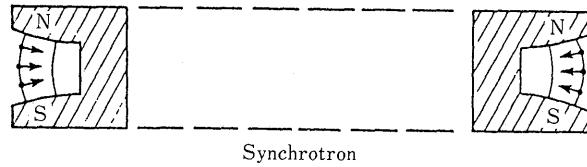
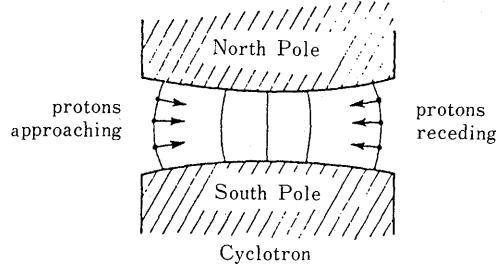
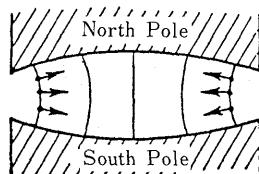


Fig. 3 放射方向に減少($n > 0$)している場が、外側にふくれている磁束線のために、軸方向に集中する力を生ずる。矢印は放射物への力を示す。

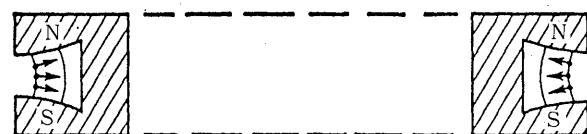
れる。軸方向集中力は、場がもっと速く減少すればより強くなることはあきらかであり、すなわち指数 n の値がより大きくなる。

一方、もし半径が増すと、両極の開きが減少するならば、場は外側へ向って増加しており ($n < 0$)、力線は中心方向にふくらみ、力は Fig.4 に示されているように、軸方向の不安定性を生ずるような力である。

我々は又放射方向の安定性に対して必要な条件を研究しよう。すなわち、もし平衡軌道から放射的に移動すれば、イオンがさらに遠くへ動くよりはむしろ平衡軌道へもどる条件を。円形軌道が次の等式によって決定されることを思い起こそう。



Impractical Cyclotron



Impractical Synchrotron

Fig. 4 放射方向に増加する($n < 0$)場が、軸方向に発散する力を生ずる。

$$\frac{Mv^2}{r} = qvB \quad (5)$$

さて、 B が eq(4)によって記述されるように変化するものとすれば： $B = \frac{K}{r^n}$ 、ここで K は定数である。そこで平衡に対して、我々は次の等式をうる。

$$\frac{Mv^2}{r} = qv \frac{K}{r^n} \quad (6)$$

r に対して、この左辺をプロットすると双曲線である。右辺のプロットはどのような n の選択によるのだろうか。もし $n > 1$ ならば、 $\frac{qvK}{r^n}$ は r とともに $\frac{Mv^2}{r}$ よりもはやく減少し、Fig.5a が得られる。交点は平衡軌道の半径 r_e を決定する。 r_e より大きい値に対して、内向きの力 $\frac{qvK}{r^n}$ は要求された求心力を与えるには不十分であり、 r_e を越えるイオンは続いて外へ出していく。これに対応して、 r_e より小さい半径では、内向きの力は過剰になり、粒子は着実に中心方向へ動く。それゆえ、もし $n > 1$ ならば、系は放射的に不安定になる。

しかし $n < 1$ ならば、状態は Fig. 5b に示されているようである。 $r > r_e$ で磁力は半径 r の軌道に必要な中心力を越えており、内向きに平衡軌道の方へ動く。一方、 $r < r_e$ で粒子は外向きに r_e の方向への力を受ける。これは放射的安定性に対する条件である。もちろん、指標 n は有益に負になりうるし（中心からの距離とともに増加する場に対応する）、その間、回復力はより強くさえなる。一般的に放射的安定性に対して、 n は +1 より小さくなければならない。要点を繰り返すと、軸方向の安定性は、もし n が 0 と $+\infty$ の間にあれば得られ、放射的安定性は、もし n が $-\infty$ と +1 の間にあれば生ずる。両方の安定性は、 n が 0 と +1 の間にあるときにのみ、同時に得られる。場は一様でなくともよく；それは放射的に減少しなくてはならないが、しかしそんなに速い割り合いで減少しなくてもよい。これはすべての弱集中加速器の基本的な特色である。

§ 4 基本的な仮定

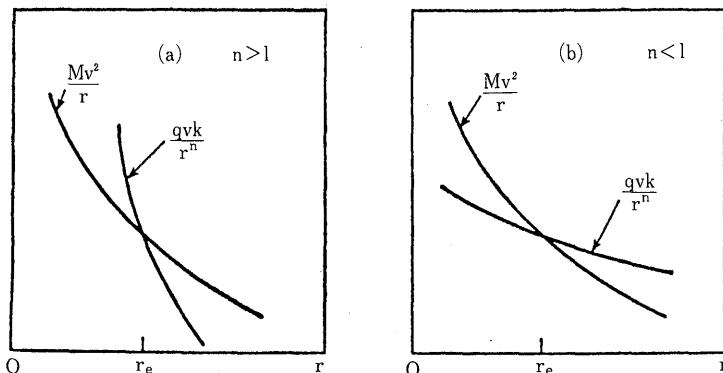


Fig. 5 系は $n > 1$ ならば放射的に不安定で、 $n < 1$ ならば、放射的に安定である。

軌道の安定性の量的な解析について、議論の進展につれて明らかになるように、多くの近似がなされている。これらのうちの2つが、出発にあたって、強調されねばならない。第一は、粒子が一定の速さで運動すると仮定し、加速の過程と結果は全く無視される。これは、粒子の加速器が粒子を加速するということに対しては、奇妙にみえるかもしれない；しかし、この状況の展望は考えている問題と無関係であり、もし軌道が力学的に安定であれば、このことを理解するのがたやすい。ベータートロン運動の周期は回転の周期に匹敵し、どんな目につくエネルギーの変化も詳しく説明される前に、多数回の回転がなされるにちがいない；このように、速度を定数として扱うことは正当であり、それ故、解析をかなり簡単にする。

しかしながらこのことは、我々が完全に加速過程に対して我々の目を閉ざすことを意味しているのではない。後で説明されるように、相対的に長時間にわたって起こる速度変化のベータートロン振動における効果を考慮に入れる方法がある。すべてを一度にというよりはむしろ、2段階に状況を研究するのが簡単でより便利である。

2番目の基礎的な過程は、ちょうど他方なしでは一方が存在しないように、放射方向と、軸方向の運動は別々に扱う。これは最初の仮定のようには決して正当化されず、入りこんだ場の等高線を持つ、最も最近工夫された機械のあるものは、もし何が起こったかについて大変詳細な像が望まれるならば、その使用は間違った結果を与えるかもしれない。しかしそのような機械においてさえも、仮定は少なくとも近似的に正しい結果を与える、一方、弱集中加速器やより単純な種類の強集中加速器に対して、運動の振幅が過剰でなければ、この基礎によってなされる計算は単なる近似よりかなり良い。

一つのさらに予備的な注目がなされなければならない。閉じられた平衡軌道からの放射方向と軸方向の偏差は次の形の方程式によって近似的に表現されうる。

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + K^2 y = 0$$

これは簡単な調和振動子の運動で、偏差 y に対する曲線の解を持つ。定数 K^2 は一変位ごとの回復力である。通常の力学的な場合において、そのような方程式はポテンシャルエネルギーが回復して、速度 $\frac{dy}{dt}$ が増加するような運動学的エネルギーに変る力学を示している。粒子の加速器の場合において、回復力が存在しても、ポテンシャルエネルギーを貯蔵する機械がなく、逆方向の運動において、周期的にあらわれる運動エネルギーの出所についての疑問が生ずる。答は、一定値を取るのが実際に粒子の総速度であるという陳述の中にあり、それゆえ、その角度成分が、垂直方向の運動がゼロから生ずるときに減少する。これはもし南北にゆれるジグザグコースを船長が操縦すれば、水を通る速さが一定であれば、まっすぐな東の方向への船の運動は上下に揺れるはずであるというのとほとんど同じである。粒子の加速器において、これらの角速度の変化は全く無視されるほど小さいので、数回のベータートロン振動があらわれる時間間隔の間に加速が起こらないという前の仮定に加えて、この理由で、当然速度が一定であると考える。

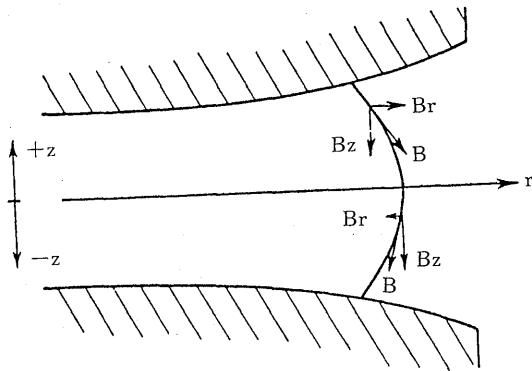


Fig. 6 $n > 0$ に対する場の成分

§5 量的な軸方向の安定性

粒子は放射方向の位置を変えず、一定の角速度をえないという仮定のもとで、簡単な軸方向の安定性の一次解析は次のようにある。真っすぐな部分のない機械において（この限定は後で除かれるが）、放射方向に弱くなっている磁場の軸のまわりに半径 γ の円を描いて回転しているイオンを考えよう。磁束線は外側にふくらみ；そして真ん中の平面で場は全く軸方向であるが、しかし、上と下の領域では Fig.6 に示されているように、真ん中の平面から測られた増加する軸的偏差 Z とともに増加する放射方向の成分 B_r がある。与えられた半径に対してそれらの値が定数である真ん中の平面での係数の値による Z の幕級数でこれを表現することは正当である。すなわち、

$$B_r = Z \left(\frac{\partial B_r}{\partial Z} \right)_{Z=0} + \frac{Z^2}{2} \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial Z^2} \right)_{Z=0} + \dots \quad (7)$$

Z の小さい値に対して、第一項のみを保持すると、この近似において、これは B_r が Z とともに線型に変化することを示している。さて、正準的磁場において、電流のない領域では B のローテーションはゼロである。もしその条件が数回のベータートロン振動が起こる非常に短い時間間に限られるならば、サイクロトロンやシンクロトロンにおいて正準条件は確かに保たれ、パルス場サイクロトロン又はベータートロンにおいては近似的に保たれる。それゆえ、

$$\left(\frac{\partial B_r}{\partial Z} \right)_{Z=0} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial \gamma} \right)_{Z=0} \quad (8)$$

第一項で近似された eq(7) は、

$$B_r = \frac{\partial B}{\partial \gamma} Z \quad (9)$$

となる。ここで、 $Z=0$ で放射方向の成分がなく、 $B_z=B$ なので、 $\left(\frac{\partial B_z}{\partial \gamma} \right)_{Z=0} = \frac{\partial B}{\partial \gamma}$ と書かれる。

eq(1) によって、 $\frac{\partial B}{\partial \gamma} = -n \frac{B}{\gamma}$ であり、これは次のようになる。

$$B_r = -nB \frac{Z}{\gamma} \quad (10)$$

真ん中の平面から Z の距離を一定の速さ v で動いている粒子は軸方向の qvB_r という力を受ける。もし粒子の荷電の符号とその運動の方向と場の方向が磁場の軸のまわりの軌道がつくるようなものであれば、放射方向に減少する場における B_r の方向は qvB_r がいつも真ん中の平面に向うようなものであることは、すでに明らかである。(eq(10)から B_r が Z とともに符号を変えることに注意せよ)。軸方向の運動方程式はそれゆえ、

$$M \frac{d^2Z}{dt^2} = -qv n B \frac{Z}{\gamma} \quad (11)$$

速さが変化しないと仮定されているので、質量は一定に取られる。このことから、 v は $v = w\gamma$ という関係から消去され、ここで w は回転のラジアン振動数で、 M はサイクロトロン関係 $Mw = qB$ で置き換えられる。これらの代入によって、

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + w^2 n Z = 0 \quad (12)$$

を得る。これはよく知られた軸方向ベータートロン運動に対する Kerst-Serber 方程式である。一つの可能な解は $Z = 0$ であり、軸方向の非摂動軌道をあらわしている。他の解は、 Z が正であるかぎり、すなわち n の正の値に対して、単純調和振動子を記述し、軸方向の安定性に対する以前の注意と一致する。そのような解は、

$$Z = Z_m \sin n^{\frac{1}{2}} wt \quad (13)$$

であり、これは粒子が真ん中の平面のまわりにある振幅 Z_m で振動することを示しており、この軸方向の運動のラジアン振動は、

$$w_z = n^{\frac{1}{2}} w \quad (14)$$

である。1 回転ごとの軸方向のベータートロン振動数（すなわち、回転ラジアン振動数によって測られた軸的ラジアン振動数）は、

$$\nu_z = \frac{w_z}{w} = n^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

であり、これはすべての単純な円形の弱集中加速器を保つ重要な関係である。(平らな部分が含まれているならば、対応する表現は後で得られる。) n が 1 より小なので、1 回転に 1 より少ない軸方向の振動がある。

eq(12) は n の大きさに制限をおかない、そしてそれが正であるとすれば、"回復力" $w^2 n Z$ は増加する指数とともにより強くなる。eq(15) は n が増加するにつれて、無制限に軸方向のベータートロン振動数が上ることを示している。このように軸方向の振動が考慮に入れられるかぎり、指數は大きな正の数が望ましい。0 と +1 の間の値が弱集中加速器に委託されているということは、 $n > 1$ ならば放射的不安定性が生ずるからであるというのみの理由からである。

§ 6 量的な放射方向の安定性

極座標においては、放射的加速は $A_r = \frac{d^2\gamma}{dt^2} - \gamma \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$ という表現によって与えられる。粒子の軌道に対して、半径はいつも軌道にはほとんど垂直なので、良い正確さでそれは $\gamma \frac{d\theta}{dt} = \nu w = v$ であると言っても良い。ここで v は角度方向の速さである。それゆえ $A_r = \frac{d^2\gamma}{dt^2} - \frac{v^2}{\gamma}$ である。運動の方射方向の方程式は質量をこの加速度に掛けることによって見出され、軸方向の成分が B_z の磁場を通る速さ v の運動によって生成される力 qvB_z に等しい。真ん中の平面にある運動に制限することによって、 B_z はトータル場 B に等しくなる。それゆえ、運動方程式は、

$$M \frac{d^2\gamma}{dt^2} - \frac{Mv^2}{\gamma} = -qvB \quad (16)$$

右辺に用いられた負の符号は力が γ を減ずるように働くからで、又速度が一定であると仮定されているので、一定の質量についてのニュートンの第2法則をこのように書くことは正当である。この方程式に対する可能な解は $\gamma = \text{一定}$ で、すなわち円軌道である。そこで最初の項は消えて、そして、

$$\frac{Mv^2}{\gamma} = qvB \quad (17)$$

それゆえ、

$$Mw = qB \quad (18)$$

そして運動量は、

$$P \equiv Mv = qB\gamma \quad (19)$$

このような円軌道（平衡な閉じられた運動量 P のイオンに対する軌道）は、もし放射物が軌道の接線にちょうど正しい速さで発射されるならば存在することが出来る。

そのような軌道は安定か？ すなわち、もし粒子がある状況によって円からそれば、それは前の軌道にもどる傾向があるか、さらにそれるか？ のいずれかであるが、これを決定するために、放射的座標を $\gamma_e + x$ とすれば、 x は一定の曲率半径 γ_e の平衡円軌道からの偏差であり、 $x \ll \gamma_e$ である。そこで、運動方程式は、

$$M \frac{d^2(\gamma_e + x)}{dt^2} - \frac{Mv^2}{\gamma_e + x} + qvB_x = 0 \quad (20)$$

ここで、 B_x は半径 $\gamma_e + x$ での場である。しかし $x \ll \gamma_e$ なので、それゆえ $\frac{1}{\gamma_e + x}$ という因子は次のように表わされる。

$$\frac{1}{\gamma_e + x} = \frac{1}{\gamma_e \left(1 + \frac{x}{\gamma_e} \right)} \approx \frac{1}{\gamma_e} \left(1 - \frac{x}{\gamma_e} \right)$$

γ_e は定数なので、運動方程式は次のようになる。

$$M \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{Mv^2}{\gamma_e} \left(1 - \frac{x}{\gamma_e}\right) + qvB_x = 0$$

しかし $\frac{Mv^2}{\gamma_e} = qvB_e$ なので、ここで B_e は γ_e の場であり、それゆえ、

$$M \frac{d^2x}{dt^2} - qvB_e \left(1 - \frac{x}{\gamma_e}\right) + qvB_x = 0$$

そして

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + (B_x - B_e)qv + qvB_e \frac{x}{\gamma_e} = 0$$

である。小さな偏差に対して放射方向に従属な場は次のようなテイラー展開で表わされる：

$$B_x = B_e + x \frac{dB}{d\gamma} + \dots$$

それゆえ、 $B_x - B_e \approx x \frac{dB}{d\gamma}$ である。軌道をそれたイオンに対して、 $v \approx w\gamma_e$ という近似をして v を

消去し、 M で割って、 $\frac{q}{M} = \frac{w}{B_e}$ を思い出そう。そこで、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma_e}{B_e} \frac{dB}{d\gamma} w^2 x + w^2 x = 0$$

*eq(1)*によって、 γ_e の近所の指数は $n = -\gamma_e \frac{dB}{(B_e d\gamma)}$ である。それゆえ、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 (1-n) x = 0 \quad (21)$$

これは放射方向運動に対する Kerst—Serber 方程式である。可能な解は $x=0$ で、平衡軌道に対応する。偏差 x の単純調和振動子を示すこれに代わる解は、 n が 1 より小さいと仮定して、先に与えた質的議論と一致する。そのような解は、

$$x = x_m \sin (1-n)^{1/2} wt \quad (22)$$

ここで x_m は振幅で、運動のラジアン振動数は次のように与えられる。

$$w_z = w (1-n)^{1/2} \quad (23)$$

結果的に、1回転ごとのそのような振動数（すなわち、回転振動数の単位でのベータートロン振動数）は次の重要な関係によって与えられる。

$$\nu_z = \frac{w_z}{w} = (1-n)^{1/2} \quad (24)$$

これは、まっすぐな部分のない弱集中機械に有効である。

指数 n が負であってさえも、*eq(21)*がなお振動運動をあらわしていることに注意すれば、このことは、大きくなる半径とともに増加する磁場に対応する。又、*eq(24)*は放射方向のベータートロン振動が大きくなればなるほど n の値がより負になることを示している。もしそれが軸方向の不安定性を生ずるという事実がなければ、放射方向の運動に関するかぎりでは、この種の場が望ましい。弱集中加速器の上での仕事は軸的、放射的振動運動に対する適当な許される n の値の重複があるという幸運な事情によっている。両方向に安定な軌道は n が 0 と 1 の間にあ

る場合にのみ存在する。

場の指数と確かいろいろなスペクトロメーターとの関連性は値打ちがない。もし $n = \frac{1}{2}$

ならば、eq(15)と eq(24)によって、 $\nu_e = \nu = \sqrt{\frac{1}{2}}$ であることが分かる；すなわち、軌道の 2π ラジアンにおける放射的と軸的運動の両方の波長について $\sqrt{\frac{1}{2}}$ である。結果的に、 $\frac{1}{2}$ 波長が生ずる角方向の道筋は $\pi\sqrt{2}$ ラジアンである。この事実は $\pi\sqrt{2}$ スペクトロメーターの基礎を形成するが、その理由はもし荷電粒子の点源がそのような場の真ん中の平面に置かれるならば、放射方向と軸方向の偏差をもって同時に放射された粒子は $\pi\sqrt{2}$ ラジアン (254.5°) さらにまわって集中する点にもってこられる。

§ 7 運動量 $P+dP$ を持つイオンの放射的振動

半径 γ_e の円軌道は運動量 P のイオンに対して可能であり、そもそもしそれが変位されるならば、それはこの円のまわりに振動するであろうことが理解される。さて、より大きい $P+dP$ という運動量の粒子の軌道について問うてみることに興味をいだく。それは又円形軌道を記述することができ、そしてそのまわりの安定な振動を記述するが、しかし、運動量 P を持つイオンの円形軌道に基づく変数によって、この運動を表わす方程式の形を見出すことはためになることであろう。なぜならこれは、それが加速ギャップを横切る時のように粒子の速さが突然増加したときに何が起こるかということに対する洞察を与えるからである。運動量 $P+dP$ の存在は増加された速さと、増加された質量を示しているので、新しい軌道はより大きい半径で異なる場のところにあろう。我々は eq(20)を次の形に書き直そう。

$$(M+dM) \frac{d^2(\gamma_e+x)}{dt^2} - \frac{(M+dM)(v+dv)^2}{\gamma_e+x} + q(v+dv)(B_e+dB) = 0 \quad (25)$$

新しい速度、それゆえ新しい質量は、両方定数であると仮定される。先に述べたように、運動量 P を持つイオンの円形軌道からの放射方向の偏差は $x = \gamma - \gamma_e$ によって与えられる。再び $\frac{1}{\gamma_e+x}$ を $\frac{1}{\gamma_e}(1 - \frac{x}{\gamma_e})$ のように展開しよう。そして小さな量 x, dM, dv, dB のすべての1次以上の項を落して、示された操作をする。 $qB_e = Mw$ なので、 $B_e q v = M w v$ となり、これは又 $\frac{Mv^2}{\gamma_e}$ とも表現されるが、対応する負の項と差し引きされて消える。我々は次の中间の表現をうる。

$$M \frac{d^2x}{dt^2} - 2M \frac{v}{\gamma_e} dv - \frac{v^2}{\gamma_e} dM + M \frac{v^2}{\gamma_e^2} x + qvdB + qB_e dv = 0$$

さて、 $\frac{v}{\gamma_e} \approx w$ で、 $qB_e = Mw$ で、eq(1)から $dB = -nB_e \frac{d\gamma}{\gamma_e} = -nB_e \frac{x}{\gamma_e}$ なので、ここで $d\gamma$ を x と

書いたが、 $qvdB = -qv n B_e \frac{x}{\gamma_e} = -Mw^2 nx$ となる。それゆえ、

$$M \frac{d^2x}{dt^2} - 2Mw dv - vwdM + Mw^2 x - Mw^2 nx + Mw dv = 0$$

まとめると、次のようになる。

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + Mw^2(1-n)x = Mwdv + vwdM$$

しかし、 $wdv = wvdv/v = \gamma w^2 dv/v$ で、 $P = Mv$ なので、 $\frac{dv}{v} = \frac{dP}{P} - \frac{dM}{M}$ である。それゆえ、

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + w^2(1-n)x &= \gamma w^2 \left(\frac{dP}{P} - \frac{dM}{M} \right) + \gamma w^2 \frac{dM}{M} \\ \frac{d^2x}{dt^2} + w^2(1-n)x &= \gamma w^2 \frac{dP}{P} \end{aligned} \quad (26)$$

これは運動量 $P+dP$ をもつイオンの運動方程式であり、その偏差 x は半径 γ_e のところでラジアン振動 w で回転する。運動量 P を持つ粒子の円軌道から測られる。量 P , dP , w と γ_e はすべて定数である。解は方程式を次の形に書いて、

$$\ddot{x} + ax - b = 0$$

が得られるが、ここで $a \equiv w^2(1-n)$ で、 $b \equiv \gamma_e w^2 \frac{dP}{P}$ である。 $u \equiv ax - b$ とおくと、 $\ddot{u} + au = 0$ となり、解は $u = u_m \cos(a^{1/2}t + K)$ であり、定数 K は $t=0$ で $u=u_m$ のときにゼロとなる。そこで、 $x = \frac{b}{a} + \frac{u_m}{a} \cos a^{1/2}t$ で、 $t=0$ のときに $x=0$ ならば、 $u_m = -b$ である。これは $x = \frac{b}{a}(1 - \cos a^{1/2}t)$ を与える。 a と b を代入すると、

$$x = \frac{\gamma_e dP}{(1-n)P} [1 - \cos w(1-n)^{1/2}t] \quad (27)$$

を得る。この意味は次のように理解される。平衡イオンが $t=0$ で半径 γ_e の円を描いて回転していると仮定しよう。無限に狭いと仮定される dee-to-dee ギャップを横切った結果として dP の片道の運動量の増加をそれが獲得する。dee の電圧はそこで切られる。運動は、半径 $\gamma_e + x_m$ の参照円のまわりの振幅 $x_m = \frac{\gamma_e dP}{(1-n)P}$ の余弦振動となる。サイクロトロンの基礎的な記述において述べられた“セミ・円”的連続は、なにか過度の単純化のようである。それらは参照円のまわりに記述された曲線的放射方向ベータートロン振動の一部として考えられるべきである。そのような振動の新しい部分はそれぞれの加速ごとに発生する。この記述の正確さはもちろん eq(26) で得られた式において用いられた近似の有効性によっている。

§ 8 ベータートロン振動の初期振幅

それが十分大きく、しかし、大きすぎないようにその内部にあるように、真空箱や磁場のギャップをデザインするために、ベータートロン振動の振幅について問うことが望ましい。あいにく、“振り子の振幅とは何か？”と問う以外に明確な答はない。それは、すべて出発条件によっている。——初期の偏差又は垂直速度又は両方である。イオンのこれら変数に関する情報は、独立な手段、大変しばしば過去の経験、信心深い見込み、又は全くのあてずっぽうによって得られる。プロトンシンクロトロンに対して問題は、機械にビームが導入されたときに角度で測ったその広がりの知識プラス理想的な軌道に関して、その中心がどこにあるかということのみに関する情報を含む。サイクロトロンとシンクロトロンにおいて、イオンはいつも磁石の中心

近くの電弧を発する源の“煙突”の横の小さな穴から現れる。煙突と近所にある dee の間の電場の垂直成分はイオンの初期垂直速度を推測するために計算される（がしかし、常にそうだというのではない）。しかし、そのような情報が欠けていてさえ、結果的な振動の振幅へのその影響を計算することは興味のあることである。

軸方向又は放射方向のどちらかの運動に対する座標として y を用いれば、管理する方程式は次の形になることが示される。

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2 w^2 y = 0$$

ここで $K^2 = n$ 又は $(1-n)$ である。解は $y = y_m \sin Kwt$ であり、これから垂直速度は $\dot{y} = y_m K w \cos Kwt$ であり、最大垂直速度は $\dot{y}_m = y_m K w$ となる。それゆえ明確に、

$$Z_m = \frac{\dot{Z}_m}{w^2 n^{1/2}} \text{ そして } x_m = \frac{\dot{x}_m}{w(1-n)^{1/2}} \quad (28)$$

これらの結果は、望ましい方向に関して測られた最大発散角 θ_m を含む代りの形に変換される。もし v と L が、接線方向の速さと横切った距離であるとするならば、

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dL} \right) \left(\frac{dL}{dt} \right) = v \tan \theta \approx v \theta \quad (\theta \text{ は小})$$

最大発散角 θ_m は、軌道が最大横切り速度を持つ軸を横切るときに生じ、それゆえ $\dot{y}_m = v \theta_m$ である。もし τ が回転周期で、 $C = v\tau$ が軌道の円周であると、

$$\dot{y}_m = \frac{\dot{y}_m}{Kw} = \frac{v \theta_m}{K 2 \pi f} = \frac{v \theta_m \tau}{2 \pi K} = \frac{\theta_m C}{2 \pi K}$$

しかし、 $K = n^{1/2}$ 又は $(1-n)^{1/2}$ であり、その結果、

$$Z_m = \frac{\theta_m C}{2 \pi n^{1/2}} = \frac{\theta_m C}{2 \pi \nu_s} \quad (29)$$

$$x_m = \frac{\theta_m C}{2 \pi (1-n)^{1/2}} = \frac{\theta_m C}{2 \pi \nu_s} \quad (30)$$

このように横切り速度又は角速度で測った発散の与えられた初期条件に対して、ベータートロン振動の初期振幅は回復力の逆数によっている。すなわち、 n 又は $(1-n)$ の $1/2$ 乗の逆数に。

定勾配（弱集中）加速器に対して 0 と +1 の間に場の指数があり；後で分かるように、 n の値が 100 にまでも及ぶ変勾配（強集円）加速器の種類があり、それで非常に減じられた振幅が同じ初期条件に対して可能であり、加速器はより低価額で、又は同じ価額でより強力なものが作られる。

§ 9 ベータートロン振動の断熱的弱まり

現状では、軸方向ベータートロン振幅の表現である eq(12)

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + w^2 n Z = 0$$

は一定振幅の曲線を示している。しかしながら、この形の方程式を得ることによって、接線方向の速度が変わらないという仮定の簡単化がなされたということを忘れてはならない；このことは質量の一定であることと、場の指数が一定であることを示している。そのような手順は合理的であるが、相対的にその間にこれらの量が有意に変化しない短い時間間隔（2, 3 ダースの回転とでも言う）にわたってのみ有効である解に興味があるからである。しかしプロトンシンクロトロン中では 1 秒かもう少し長い全加速時間間隔の間の、長時間のふるまいに対して変化が考慮に入れられなければならない。さて、方程式はより一般的な項で、ニュートンの第 2 法則に一致して、次の形に書かれる。

$$\frac{d(MZ)}{dt} + Mw^2 n Z = 0 \quad (31)$$

Z と \dot{Z} が両方とも時間従属である微分方程式がここにある；シンクロトロン中で、質量は常に増加し、 w は減少し、 n は増加する（一定振動数と変調された振動数の両方について）一方、サイクロトロン中では w は増加するが、ここで後で示されるように n は一定である。示された微分をして、 M で割ると次の式を得る。

$$\ddot{Z} + \frac{\dot{M}}{M} \dot{Z} + bZ = 0 \quad (32)$$

ここで $b \equiv w^2 n$ で時間とともに変化する。正の係数を持つ Z 項は運動が弱められていることを示しており、振幅の減少は質量の増加の割合によっている。 M と b の変化は振動の期間に関してゆっくり起こり、近似的な解はいわゆる WKB 法によって得られる。これは次のようにして得られる。試行解として次のように取る。

$$Z = Z_m f(t) \exp[\pm j \int b^{1/2}(t) dt] \quad (33)$$

ここで $f(t)$ は未決定な t の関数であり、 $j = \sqrt{-1}$ である。 f と b が定数であると考えることによって、これは合理的な解であることが分かる；仮定された解は簡単な曲線となり、もし微分方程式の係数が定数ならば、これは正しい。我々は Z の一階と二階の微分をしよう：

$$\dot{Z} = Z_m (f \pm f_j b^{1/2}) \exp[\pm j \int b^{1/2} dt] \quad (34)$$

$$\ddot{Z} = Z_m (f \pm f_j b^{1/2} \pm \dot{f} b^{1/2} + f_j b^{1/2} \dot{f} b^{1/2} \pm \frac{f_j \dot{b}}{2b^{1/2}}) \exp[\pm j \int b^{1/2} dt] \quad (35)$$

これら Z , \dot{Z} , \ddot{Z} を eq(32) に代入し、 Z_m とエックスポーネンシャルの項が約され、その結果、

$$\ddot{f} \pm 2\dot{f}jb^{1/2} - fb \pm \frac{f_j \dot{b}^{1/2}}{2b^{1/2}} + \frac{\dot{M}}{M} \dot{f} \pm \frac{\dot{M}}{M} f_j b^{1/2} + fb = 0 \quad (36)$$

3 番目と最後の項が差し引きされる。 f と M の時間変化が小さいと仮定されるので、 \ddot{f} と $\dot{M}f$ の項は小さいので落される。そこで $2jb^{1/2}f$ で割ると

$$\pm \frac{\dot{f}}{f} \pm \frac{\dot{b}}{4b} \pm \frac{\dot{M}}{2M} = 0$$

dt を掛けて

$$\frac{df}{f} = -\frac{1}{4} \frac{db}{b} - \frac{1}{2} \frac{dM}{M}$$

それゆえ

$$\ln f = \ln b^{-1/4} + \ln M^{-1/4} + \ln K = \ln(b^{-1/4}M^{-1/4}K)$$

ここで K は積分定数である。そこで

$$f = \frac{K}{b^{1/4}M^{1/4}} = \frac{K}{(w^2n)^{1/4}M^{1/4}} \quad (37)$$

しかし $M = \frac{qB}{w}$ で、 eq(33) にこの f を用いて、 次の解をうる。

$$Z = \frac{\text{constant}}{n^{1/4}B^{1/4}} \exp(\pm j \int w n^{1/4} dt) \quad (38)$$

これは $\frac{1}{n^{1/4}B^{1/4}}$ のように消えてゆく振幅を持つ弱まりつつある正弦振動の運動を示している。類似の放射運動に対する解は次のようになることは明らかである。

$$x = \frac{\text{constant}}{(1-n)^{1/4}B^{1/4}} \exp(\pm j \int w(1-n)^{1/4} dt) \quad (39)$$

シンクロトロン中で、場はおろらく 50 倍ほど上昇し、 n は一定に（又はそれに近く）保たれ、振幅は場の $\frac{1}{2}$ 乗に逆比例して減少する。それゆえ、正しく形作られた場の領域の大きい断面積は導入時間に本質的なので、両極間の γ より小さな空間のみが、最高エネルギーで“良い”場を持つ（もし一回転ごとの適当なエネルギー利得によって、そして加速電圧の適当に管理される振動数によって、すきまの中で、ビームが集中されつづけるならば）。この究極的な忍耐の休養は磁石デザイナーに大きな助けとなり、一方、高エネルギービームの小さい断面積は実験家に有利である。

サイクロトロンとシンクロトロンにおいて、最大軌道で数% 減少するだけで場はほとんど一定であり、 n はゼロ近くから最高エネルギーで約 0.2 又は 0.3 の値まで増える。結果的に、加速過程の間に垂直方向の振動は弱められ、放射方向の振幅は増加される。

参考文献

JOHN J. LIVINGOOD 著「PRINCIPLES OF CYCLIC PARTICLE ACCELERATORS」 D. VAN NOSTRAND COMPANY, INC.

（原稿受理 192年11月30日）