

“ビーム・ビーム モデル”

宮 本 道 子

## Summary

### A Summary of Some Beam-Beam Models

Michiko Miyamoto

In this paper, I summarized a Prof A. W. Chao's work. The linear-lens models and the single resonance models are introduced in this paper. In the linear-lens models, it is considered that two bunched beams colliding head-on, a particle in one beam passes through the electromagnetic field produced by particles in the other beam and receives a transverse impulse. In the single-resonance models, the static model and the dynamical model are studied.

Prof. A. W. Chao 著の“A Summary of Some Beam-Beam Models”をまとめてみました。

## 摘 要

ビーム・ビーム相互作用に対する理論的モデルの2つの範疇を紹介しよう。線型レンズモデルと単一共鳴モデルである。線型レンズモデルにおいて、ビーム・ビーム力は局所化された線型レンズによって線型化され、又表現される。コヒーレントでない単一粒子効果の解析は行列のテクニックを用いて、これらのモデルにおいて詳細になされる。多くの点において、線型レンズモデルはビーム・ビーム相互作用の、我々の出発点を構成する。単一共鳴モデルにおいて、相当数のベータートロン振動数同調粒子が、ある合理的な数に近づくときに、その理解は可能なコヒーレントでない安定性に関連する。これらのモデルにおいて、一つの、唯一つのそのような合理的な数が、単一粒子ビーム・ビーム効果を優勢なものとするということが仮定されている。静的単一共鳴が多くの実験結果を説明出来ないということがわかっている。散布性の同調波動又は周期性同調変調に対するある技巧を含めることによって、静的単一共鳴理論を修正するために、ある企てがなされている。これら修正された単一共鳴モデルは、ある限られた質的成功をしてきた。

### 内容の表

- 1 序論
- 2 線型レンズモデル
  - 2・1 コヒーレントでないベータートロン効果
  - 2・2 コヒーレントでないシンクロトロン効果
  - 2・3 コヒーレント効果
- 3 単一共鳴モデル
  - 3・1 静的モデル
  - 3・2 力学的モデル

## 1 序 論

ビーム・ビーム相互作用という主題は、ビームを衝突させるという策略が最初に考えられた時から研究されている。今日多くの衝突するストーリッジリングの操作によっても、この主題はなお、完全に理解されていない。多くの現存するストーリッジリングは特別なビーム・ビームの設計のルミノシティに到達していないという事実によって、これは明らかである。すなわち、“積分されない”ハミルトニアンによって系を解くことである。同じような困難は、他の分野の物理学にあらわれているし、又結局最終的にあらわれるであろう。

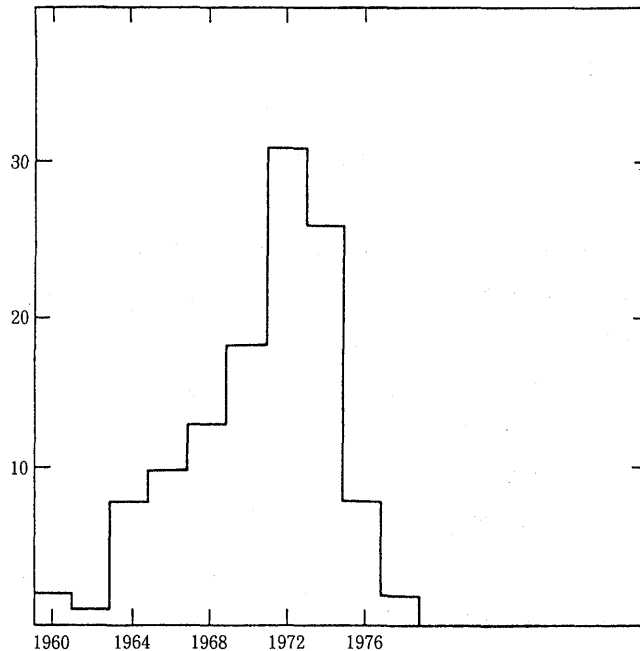


Fig. 1 ストーリッジング物理学者によって、ビーム・ビーム相互作用という主題について書かれた、カレンダー年ごとの論文の数。

Fig 1 は、ストーリッジング物理学者がビーム・ビーム相互作用を主題に書いた論文の数をカレンダー年ごとに示したものである。1973年-1974年にピークがあり、1975年以後に降下しているのがわかる。このことが、ビーム・ビーム相互作用についての主題のシンポジウムをなぜ緊急にする必要があるか説明してくれるが、それは報告記事を書くことが、少なくとも1978年-1979年に対する Fig 1 の曲線がゼロに落ち込むことを阻止するからである。

Fig 1 で考えられた参考文献は実験的研究と数字上のシミュレーションと理論的モデルとそして報告記事を含んでいるからである。理論的モデルはあらく、線型レンズモデルと単一共鳴モデルと多数共鳴モデルの3つの範疇にわけられる。ここでは、ある線型レンズモデルと単一共鳴モデルについて報告しよう。議論の簡単のために、バンチ化されたビームの衝突について考えよう。

## 2 線型レンズモデル

2つのバンチ化されたビームが正面衝突するとき、一方のビームの中の粒子が他方のビーム中の粒子によってつくられた電磁場を通過し、横方向の瞬間力を受ける。この横方向の瞬間力は水平の  $x$  成分と垂直の  $y$  成分に分解され、2つのはねかえり角  $\Delta x'$  と  $\Delta y'$  を生ずる。もしバンチ長が相互作用点での水平と垂直のベータートロン波長と比べて短ければ、横方向の粒子の

x-y 平面での分布は、相互作用の間に、認められる程度に変化しないし又、瞬間力は局所化されたデルタ関数的摂動になると考えられる。与えられた横方向の粒子の分布に対して、粒子が相互作用領域を通過するとき、はねかえり角  $\Delta x'$  と  $\Delta y'$  は粒子の水平変位  $x$  と垂直変位  $y$  によっている。 $\sigma_x$  と  $\sigma_y$  というビームの大きさを持つ、2 次元正規ガウス分布に対して、例えば

$$\Delta x' = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \quad \Delta y' = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \quad (1)$$

を得るが、 $U(x, y)$  は電磁的ポテンシャルの井戸で

$$U(x, y) = -\frac{N\gamma_0}{\gamma} \int_0^\infty dt \frac{\exp\left[-\frac{x^2}{2(\sigma_x^2+t)} - \frac{y^2}{2(\sigma_y^2+t)}\right] - 1}{\sqrt{(\sigma_x^2+t)(\sigma_y^2+t)}} \quad (2)$$

であり、 $\gamma_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  は粒子の古典的半径であり、 $N$  はやってくる一方のバンチ中の粒子の数であり、 $\gamma$  は相対論的ローレンツ因子である。Eq (1) を導くときに、相互作用の間に、 $x$  と  $y$  が認められる程度に変化しないという近似をした。Eq (1) から、ビーム・ビーム力は電磁的ポテンシャルのグラディエントとして書かれることは明らかである。このポテンシャルの起こりは、 $N$  個の点電荷の集まりというよりはむしろ、総電荷  $Ne$  を持つ荷電分布の連続体である。直接のクーロン相互作用の結果ではない効果（ビーム・ビーム制動放射効果のような）や、個々の粒子の間の相互作用の結果である効果は、我々の論述に含まれない。

線型レンズ近似において、我々は小さなベータートロン振巾を持つ粒子であると考えるので、 $x < \sigma_x$ ,  $y < \sigma_y$  である。これらの粒子に対して、Eq (1) は

$$\Delta x' = \pm \frac{2N\gamma_0}{\gamma\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)} x, \quad \Delta y' = \pm \frac{2N\gamma_0}{\gamma\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} y \quad (3)$$

となり、ここで $-$ の符号は、もし2つのビームの電荷が異符号であれば用いられ、 $+$ の符号は同符号であれば用いられる。この後、我々は $-$ 符号を仮定する。Eq (3) からわかるように、運動は線型で、結合されていない。線型レンズモデルにおいて、それゆえ一つの自由度のみを考慮することが可能であり、我々は垂直次元を選ぶ。

## 2・1 コヒーレントでないベータートロン効果

小さな振巾を持つ粒子の運動は、行列の技術を用いて好都合に解析される。ベクトル

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$$

に対する変換は、Eq (3) から相互作用領域を横切るとき、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{f} = \frac{2N\gamma_0}{\gamma\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} \quad (4)$$

であると考え、この変換は焦点距離  $f$  の薄いレンズ四重極磁石の変換行列と同じであると思われる。もし我々がストリージングの超周期ごとに一つの相互作用領域があり、 $\nu$  が超周期ごとの非摂動ベータートロン同調振動数で、 $\beta^*$  が相互作用点における非摂動ベータ関数とすれば、一つの相互作用の真中から隣りの相互作用領域の真中への変換は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi(\nu + \Delta\nu) & \beta^* \sin 2\pi(\nu + \Delta\nu) \\ -\frac{1}{\beta^*} \sin 2\pi(\nu + \Delta\nu) & \cos 2\pi(\nu + \Delta\nu) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu & \beta_0^* \sin 2\pi\nu \\ -\frac{1}{\beta_0^*} \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix}$$

ここで  $\Delta\nu$  はビーム・ビーム摂動によって起こされた同調振動数の変化であり,  $\beta^*$  は相互作用領域の真中の摂動的ベーター関数である。薄いレンズモデルにおいて, 摂動ベーター関数の  $\frac{1}{2}$  乗で横方向ビームの大きさを目盛る。Eq (5) を解いて, 次の解を得る

$$\cos 2\pi(\nu + \Delta\nu) = \cos 2\pi\nu - \frac{\beta_0^*}{2f} \sin 2\pi\nu \quad (6)$$

$$\beta^*/\beta_0^* = \sin 2\pi\nu / \sin 2\pi(\nu + \Delta\nu)$$

1つ又は2つの無名数の目盛りの変数がビーム・ビーム相互作用を完全に, 又はほとんど完全に記述することを期待し, 実験的にも理論的にも真面目に研究してきた。線型レンズモデルにおいて, Eq (6) から, 2つのそのような変数は非摂動ベーター同調振動数  $\nu$  と, まちがいなく線型であるという合図としての振巾  $\alpha$  である。一方, 線型レンズモデルは小さな振巾の粒子の運動を物理学的に記述する。それは解析しやすくするという利点があり又, さらに冒險をする出発点となる。

## 2・2 コヒーレントでないシンクロトロン効果

線型化されたビーム・ビーム摂動は, Eq (3) に示されているように x 方向と y 方向の運動を結び付けないといえども, ある条件のもとでそれは縦方向シンクロトロン自由度に x 方向又は y 方向の運動を結び付けている。この意味において, 我々は線型レンズ近似と行列の技術を用いて, これを例として示そう。

2つのビームを考えよう。一つは強く, もう一方は弱く,  $2\alpha$  の角をなして, まっすぐに交差する。粒子の分布における変化と同様に, 我々はベーター同調振動数とシンクロトロン同調振動数変化を求めることができる。

$$\xi = \frac{\beta_0^*}{4\pi f} \quad (7)$$

もし2つのビームが同符号の電荷を持つならば, 負の符号が Eq (7) に,  $\xi < 0$  を与えるために加えられるにちがいない。 $\xi$  が小さいとき,  $4\pi$  という因子が含まれているので, ビーム・ビーム同調振動数変化  $\Delta\nu$  は  $\xi$  に等しい。 $\xi$  の定義に含まれているのは非摂動  $\beta_0^*$  であることに注意しよう。因子  $\beta_0^*$  は, 摂動に適用されるとき, 粒子のベーター同調運動における摂動の効果を与える倍率因子と考えうる。ビーム・ビーム相互作用の効果を減じるために,  $\beta_0^*$  の値を減じるのが好都合である。多くのストーリッジリングのルミノシティを増やすために上首尾に用いられてきた, 低  $\beta^*$  挿入の発案を導く。

座標として2つの変数  $\nu$  と  $\xi$  を用いて, 我々は  $\Delta\nu$  と  $\beta^*/\beta_0^*$  の等高線を Fig 2 と Fig 3 に

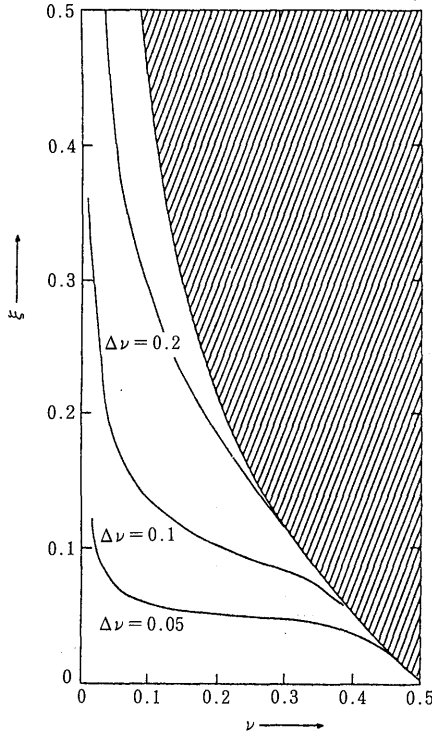


Fig. 2 2つのスケール変数 ( $\nu$ ,  $\xi$ ) の平面の中で一定同調振動数変化の等高線

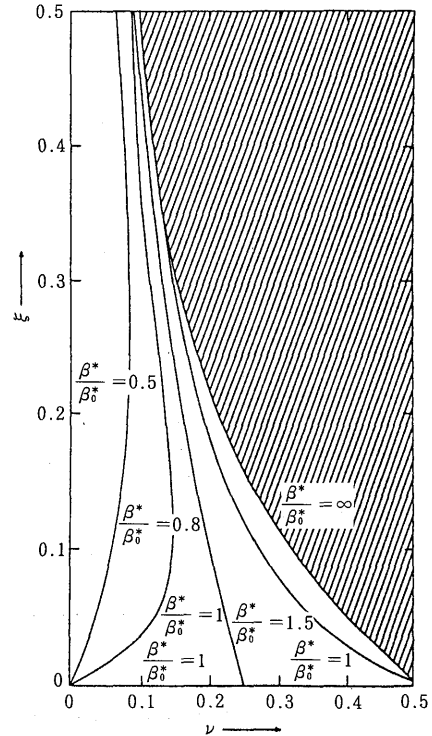


Fig. 3 ( $\nu$ ,  $\xi$ ) 平面で一定  $\beta^*/\beta_0^*$  の等高線

プロットした。 $\nu$  の値は 0 と  $\frac{1}{2}$  の間に限られているが、それは  $\nu$  は周期的であり  $\frac{1}{2}$  を周期としているからである。斜線部分は安定な解のない領域を示している。与えられた  $\xi$  に対するこの不安定領域の巾  $\delta\nu$  は

$$\delta\nu = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} 2\pi\xi \quad (8)$$

となり、小さな  $\xi$  に対しては、 $\delta\nu = 2\xi$  となる。Fig 2 から  $\xi$  が小さく、 $\nu$  が 0 と  $\frac{1}{2}$  に近すぎないと仮定すれば、 $\Delta\nu$  は近似的に  $\xi$  に等しいことに注目しよう。

与えられたストリージングの形状に対して、少なくとも質的に、それぞれのビーム中の粒子の数  $N$  の関数としてルミノシティ  $\mathcal{L}$  のふるまいを知りたいと思う。これを知るために、 $N$  が変化するとき、 $\xi$  と  $\beta^*$  の値が Eq (6) と矛盾しない形における表現  $\xi \propto \frac{N}{\beta^*}$  に従って変化することと、その、粒子の数  $N$  についての依存性を見出すために、 $\mathcal{L} \propto \frac{N^2}{\beta^*}$  という表現に代入しなければならない、 $\beta^*$  の矛盾のない解であるということにまず注目しよう。これはコンピュータを用いてなされ、結果は対数グラフ用紙を用いて Fig 4 に描かれている。点線は  $\beta^*$  の変化を考慮に入れない  $\mathcal{L}$  の値を表わしている。大きい  $\nu$  に対して (すなわち、 $\frac{1}{2}$  近くで)、 $\mathcal{L}$  は点線より矛盾なく下であり、一方小さい  $\nu$  に対して、 $\mathcal{L}$  は点線より上にある。しかし両方

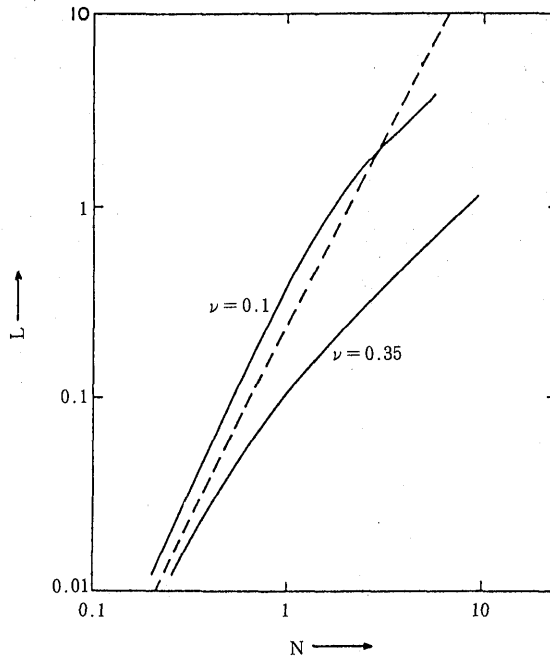


Fig. 4 非摂動同調振動数 $\nu$ の2つの値に対する粒子の数 $N$ に対するルミノシティ $L$ の期待されるふるまい。

の場合において、 $N$ が無限に大きくなるとき、 $L$ は点線より下になる。ルミノシティを下げるためには、この結果は超周期ごとのベータートロン同調振動数はわずかに $\frac{1}{2}$ 整数又は整数だけ上げる（もし $\delta < 0$ ならば下げる）ことを暗示している。

多くの線型レンズモデルの予言は実験観測と一致しない。例えば、ビーム・ビーム摂動が、 $x$ 方向と $y$ 方向の運動を結合することを観察してきた。横方向ビームの巾は、摂動ベータ関数の $\frac{1}{2}$ 乗で目盛られているようにはみえない。ビーム・ビーム不安定性はFig 2とFig 3に示された安定性限界の下のビーム強度のくぼみとともに現われるかのようにみえる。そしてビームは強いビームとの衝突の影響のもとで、弱いビームの有限同調振動数を持つことが観察されている。これをするために、ビームの中心に水平方向の変位を持たず、垂直方向の変位 $y$ と縦方向の変位 $z$ を持つ弱いビームの中の粒子を考えよう。それぞれの横切りのときに、この粒子が受ける瞬間力は相対論的極限において、次のように与えられる

$$\frac{\Delta \vec{p}}{p} = -\frac{G \hat{n}}{\cos \alpha} \int_0^{y \cos \alpha - z \sin \alpha} dy e^{-\frac{y^2}{2\Sigma^2}} \quad (9)$$

これは、線型化の後、次のようになる

$$\frac{\Delta \vec{p}}{p} = -G \hat{n} (y - z \tan \alpha) \quad (10)$$

ここで、

$$G = \frac{2N\gamma_0}{\gamma \sigma_x \Sigma}$$

$$\Sigma^2 = \sigma_y^2 \cos^2 \alpha + \sigma_z^2 \sin^2 \alpha$$



であり、 $\hat{n}$  は Fig 5 に示された単位ベクトルである。 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  はビームの広がりの巾、ビームの高さ、そして強いビームのバンチの長さである。垂直成分と縦方向成分を持っているこの瞬間力は  $y$  方向と  $z$  方向の運動の間の仕組みを用意する。 $\Delta \vec{p}$  の縦方向成分は粒子のエネルギーの総計次のような変化の原因となる。

$$\Delta \delta = \frac{\Delta P_z}{P_0} = G \sin \alpha (y - z \tan \alpha) \quad (11)$$

$$\delta = \text{相対的エネルギー誤差 } \Delta E/E$$

そして垂直成分は粒子にはねかえりを与える

$$\Delta y' = \frac{\Delta P_y}{P_0} = -G \cos \alpha (y - z \tan \alpha) \quad (12)$$

もし我々が次のベクトルを定義すれば

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ z \\ \delta \end{bmatrix}$$

Eq (11) と Eq (12) から、ビーム・ビーム交差に対するこのベクトルの変換行列が次のように書かれることがわかる。

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -G \cos \alpha & 1 & G \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ G \sin \alpha & 0 & -G \tan \alpha \sin \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

2つの隣り合う相互作用点の間の変換行列は、ビーム・ビーム摂動からの  $y-z$  結合はないものと仮定して除いて、次のようになる

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\nu_y & \beta_0^* \sin 2\pi\nu_y & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta_0^*} \sin 2\pi\nu_y & \cos 2\pi\nu_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここで、 $ad - bc = 1$ ,  $a + d = 2\cos 2\pi\nu_s$ , そして  $b = -\eta L$  である。運動量コンパクション因子  $\eta$ , 総軌道長  $L$ , そして超周期ごとの同調振動数の値  $\nu_{y,s}$ 。超周期ごとの総変換は  $T_0 = T_2 T_1$  によって与えられる。 $T_0$  の固有値  $\lambda$  は

$$\det (T_0 - \lambda) = 0$$

を満たし、又は

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} - \cos 2\pi\nu_y + \frac{\beta_0^* G}{2} \sin 2\pi\nu_y \right) \left( \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} - \cos 2\pi\nu_s - \frac{a^2}{2} G \eta L \right) \\ & = -\frac{1}{4} a^2 \beta_0^* G^2 \eta L \sin 2\pi\nu_y \end{aligned} \quad (15)$$

Eq (15) の  $\lambda$  に対する 4 つの解は  $\lambda = \exp(\pm i 2\pi\nu)$  によって、摂動ベータートロンとシンクロトロン同調振動数に関係付けられる。安定性に対して、同調振動数の摂動は実数でなければならない。同様に、すべての 4 つの  $\lambda$  が  $|\lambda| = 1$  を満たさなければならない。ある代数をしたのちに、この安定性の条件がシンクロ・ベータートロン共鳴のまわりの停止周波数巾

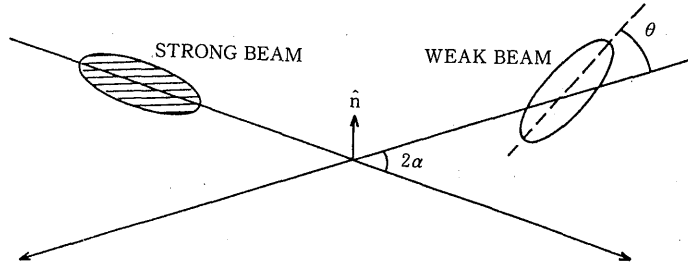


Fig. 5 ある角度をなしての強いビームと弱いビームの衝突。弱いビームはその運動方向に関して傾いている。

$$\delta\nu \approx \frac{1}{\pi} \left( \frac{\beta_0^* G^2 \eta L \alpha^2}{\sin 2\pi\nu_y} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

を持ち、停止周波数の外側で、 $\nu_y - \nu_s = \text{整数}$ を満たすということが示されうる。垂直方向の大きさの間の結合の場合と対称的に、粒子の運動はある共鳴のまわりに安定で、異なる共鳴のまわりに不安定であるのは、縦方向の大きさの負の質量の効果による。もし我々が $\beta_0^* G = 0.6$ 、 $\alpha = 1\text{mrad}$ 、 $\nu_y = 0.1$ 、 $\eta L = 2\text{m}$ 、そして $\beta_0^* = 0.2\text{m}$ ときめれば、停止周波数は $8 \times 10^{-4}$ となる。

変換行列 $T_0$ から粒子の分布の変化を知ることが又可能である。弱いビームの中の単一粒子の運動を記述する行列 $T_0$ は2つの固有モードを持つ。固有モード軸は $y-z$ 平面にあり、 $y-z$ 軸に関して傾いている。弱いビームはビームの分布の主軸にこれら固有モード軸が一致するように方向付けられている。 $T_0$ を知って、我々は傾斜角 $\theta$ を $T_0$ の固有モード軸をさがすことによって得る (Fig5を見よ)。結果は、 $|\alpha| \ll 1$ と $|\beta_0^* G| \ll 1$ を仮定して、

$$\theta \approx \frac{\beta_0 G \alpha \sin 2\pi\nu_y}{2 (\cos 2\pi\nu_y - \cos 2\pi\nu_s)} \quad (17)$$

である。

このビームの傾きのルミノシティへの効果を見るために、又我々がルミノシティの損失を避けるために、

$$\theta \leq \sigma_y / \sigma_z$$

とすべきであることに注目しよう。Eq (17) から、この条件はもし我々がシンクロ・ベータートロン共鳴から十分な距離だけ離れていれば、すなわち

$$|\nu_y \pm \nu_s - k| \geq \delta\nu$$

ならば、満たされることを知る。ここで $k$ はある整数で、 $\delta\nu$ は次のように与えられる。

$$\delta\nu = \frac{\sigma_z}{\sigma_y} \frac{\beta_0^* G \alpha}{2\pi} \quad (18)$$

もし $\frac{\sigma_z}{\sigma_y} = 600$ 、 $\beta_0^* G = 0.6$ そして $\alpha = 1\text{mrad}$ ならば、我々は $\delta\nu = 0.06$ であることを知る。

Eq (16) に従って見出した停止周波数巾とこの値を比べると、不安定停止周波数領域の十分外側で、ルミノシティがビーム・ビームのシンクロ・ベータートロン結合に患わされるであろうことを知る。

ビーム・ビームの縦方向の効果の他の可能な例は有限のエネルギー散乱をする位置で、2つのビームの正面衝突を考えることによって得られることが主張されるべきである。x方向とz方向の運動はこの場合に結合する。線型レンズモデルと行列の技術はここでよく用いられる。

他のシンクロトロン・ベータートロン結合効果はなお、相互作用点でベータ関数 $\beta_0^*$ と比べてパンチ長 $\sigma_z$ が小さくないときに正起するビーム・ビーム摂動によって起こされる。パンチの範囲内で異なる縦方向位置 $z$ を持つ粒子は $\sigma_z/c$ の時間巾で、異なる時間に相互作用点に到達する。もし $\sigma_z$ が $\beta_0^*$ と比べて小さくなければ、横方向の粒子分布は $\sigma_z/c$ の持続時間に認められる程度に変化するであろう。横方向ビーム・ビームのはねかえりは粒子によって受け取られ、粒子の縦方向位置によって、シンクロ・ベータートロン結合効果を生ずる。この効果は、その主たる項が $z$ の四乗であり、線型レンズモデルによって、扱われえない。

### 2.3 コヒーレント効果

ここまでは、我々はビーム・ビーム衝突の影響のもとで単一粒子のコヒーレントでない運動を考えてきた。パンチの質量の中心が振動している間、ビーム・ビーム相互作用はコヒーレントなパンチ振動を励起し、その中でそれぞれのパンチは粒子の剛体分布のようにふるまう。線型レンズ近似において、コヒーレント効果は行列の方法を用いて再び解析される。それぞれのビームに一つのパンチという等しい強度の逆方向に回転する衝突するパンチを持つストーリーリングを考えよう。2つの超周期があり、2つの相互作用点がある。おたがいを通り抜ける2つの剛体パンチによって経験されるはねかえり角は

$$\Delta y_{+}' = -\frac{1}{f} (y_{+} - y_{-}) = -\Delta y_{-}' \quad (19)$$

ここで $y_{+,-}$ は非摂動軌跡に相対的なパンチの中心の垂直変位であり、焦点距離 $f$ はEq (4)に定義されている。次のベクトルによって、コヒーレントな運動を記述するならば、

$$\begin{pmatrix} y_{+} \\ y_{+}' \\ y_{-} \\ y_{-}' \end{pmatrix}$$

ビーム・ビーム衝突に対する変換行列は

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 & \frac{1}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 0 & -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

となる。超周期ごとの総変換は $T_0 = T_2 T_1$ であり、ここで $T_2$ は2つの隣り合う衝突点の間の変換行列である。

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\nu & \beta_0^* \sin 2\pi\nu & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta_0^*} \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\pi\nu & \beta_0^* \sin 2\pi\nu \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\beta_0^*} \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu \end{bmatrix} \quad (21)$$

$T_0$  の固有値は  $\det(T_0 - \lambda) = 0$  から決定され、2つの複素数の対になっている

$$e^{\pm 2\pi i \nu} \quad \text{と} \quad e^{\pm 2\pi i (\nu + \Delta \nu)}$$

ここで、

$$\cos 2\pi(\nu + \Delta \nu) = \cos 2\pi\nu - 4\pi\xi \sin 2\pi\nu \quad (22)$$

最初の対は、その中で2つのバンチが相互作用点での位相で、上、下に動く“0モード”に対応する。バンチはビーム・ビーム力を感じず、モード振動は非摂動ベータートロン振動数にひとしい。このモードはいつも安定である。2番目の固有値は“ $\pi$ モード”に対応し、その中で2つのバンチは位相をはずれて運動する。バンチの中心のそばで変位  $y$  が観察されるビーム・ビーム力はコヒーレントでない運動での  $2y$  という変位を持つ単一粒子に対する力と同じである。Eq (22) はこのように、 $\xi \rightarrow 2\xi$  としたときの Eq (6) と同じである。 $\pi$ モードが安定であるために、Eq (22) の右辺の絶対値が1より小でなければならない。与えられた  $\xi$  に対して、 $\xi$  の値はある安定性極限  $\xi_{\text{limit}}$  よりも小さくなければならない。Fig6 は、 $\nu$  の関数としての  $\xi_{\text{limit}}$  のふるまいを示している。それは  $\nu = \frac{1}{2}$  の周期を繰り返している。単一粒子運動に対する安定性の

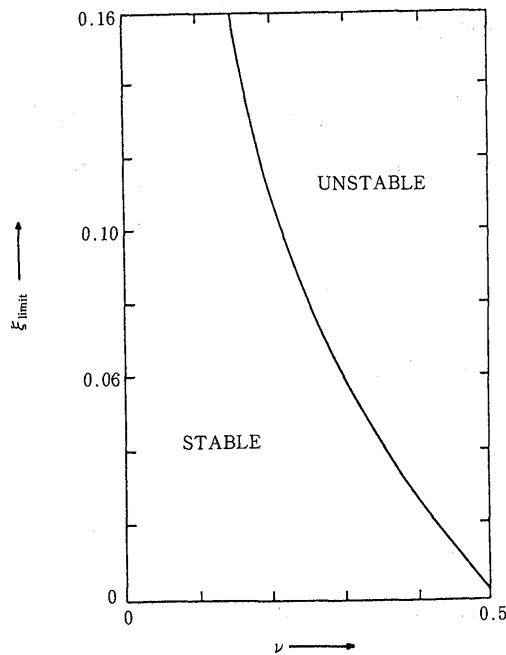


Fig. 6 2つのバンチに対する  $(\nu, \xi)$  平面における双極子モードのコヒーレント振動に対する安定性の領域

極限 $\xi_{\text{limit}}$ の2倍である。与えられた $\xi$ に対して、コヒーレントな運動はもし $\nu$ が $\frac{1}{\pi} \tan^{-1}(4\pi\xi) \approx 4\xi$ の範囲内で半整数又は整数だけ下（もし $\xi < 0$ ならば上）ならば不安定である。

停止周波数の内部の衝突するビームの操作はバンチの消失を必ずしも意味しないが、これは振動振巾がビームの大きさのかなり大きい部分を越えるほど大きくなるやいなや、ビーム・ビーム力は線型レンズモデルの予言よりもっと弱くなる。しかしながら、ビームは単純に大抵は互いに相手を必要とするので、安定な $\pi$ モード振動さえルミノシティを小さくする。

我々は3つのバンチのそれぞれのビームの中にある6つの衝突するバンチの他の例を考えてみよう。ストーリッジリングは6つの相互作用点を持つ。この例の解析は、2つのバンチの前の例の解析に近いが、しかし下に示されたベクトルは12次元である。

$$[y_{+1}, y'_{+1}, y_{+2}, y'_{+2}, y_{+3}, y'_{+3}, y_{-1}, y'_{-1}, y_{-2}, y'_{-2}, y_{-3}, y'_{-3}]$$

ここで、はじめの6つの座標軸は+のビームに関するもので、他の6つは-のビームに関するものである。添字1, 2, 3は一つのビームの中の異なるバンチに関するものである。バンチ+1がバンチ-1と衝突し、バンチ+2がバンチ-2と衝突し、バンチ+3がバンチ-3と衝突する変換行列は12×12行列

$$T_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$$

であり、ここで

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{f} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{f} & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

次の変換で、バンチ+1, +2, +3はそれぞれバンチ-2, -3, -1と衝突すれば、変換行列は、

$$T_2 = \begin{bmatrix} A & C \\ D & A \end{bmatrix}$$

となり、ここで

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

である。次の衝突は+1, +2, +3が-3, -1, -2に対するものであり、変換行列は

$$T_3 = \begin{bmatrix} A & D \\ C & A \end{bmatrix}$$

(25)

である。衝突の間の変換行列は

$$R = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix}; \quad r = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu & \beta_0^* \sin 2\pi\nu \\ -\frac{1}{\beta_0^*} \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu \end{pmatrix} \quad (26)$$

ここで  $2\pi\nu$  は、2つの隣り合う相互作用点の間の、先導ベータートロン位相である。一つの超周期に対する総変換（3つの衝突と半回転）は

$$T_0 = RT_3 RT_2 RT_1 \quad (27)$$

である。 $T_0$ の6つの固有モードは6つのコヒーレントなビーム・ビームモードを記述する。もしすべての  $T_0$  の固有値が絶対値1を持つならば、コヒーレントな運動は安定である。Fig7に、ビーム・ビーム変数の安定性の極限  $\xi_{\text{limit}}$  が  $\nu$  (非摂動ベータートロン同調振動数の  $\frac{1}{6}$  であ

る) に対して描かれている。与えられた  $\xi < 1$  に対して、もし  $\xi$  が  $4\xi$  の範囲内で  $\frac{1}{2}$  下 (もし  $\xi < 0$  ならば上)、又は  $2\xi$  の範囲内で  $\frac{1}{3}$  下、又は  $2\xi$  の範囲内で  $\frac{1}{6}$  下ならば不安定である。 $\frac{1}{2}$  の  $\nu$  の範囲において、これは停止周波数巾  $8\xi$  の総計に対応する。不安定領域はもし  $\xi$  が 0.06 ぐらいの値であれば  $\nu$  空間のほとんど全域を占めることは明らかである。

### 3 単一共鳴モデル

線型レンズモデルにおいて、高度に非線型なビーム・ビーム力は線型化される。粒子の運動は行列法を用いて正確に分析されうる。我々は単一粒子の運動は完全に超周期ごとのベータートロン同調振動数  $\nu$  と強さの変数という2つの変数で記述されることを知る。又もし  $\nu$  が十分に  $\frac{n}{2}$  に近ければ、 $n$  は整数であるが、粒子の運動は不安定になることも知った。

$\nu$  が合理的な数  $\frac{n}{p}$  に近ければ、ビーム・ビーム摂動によって、粒子の運動は影響され、線型レンズモデルは  $p=2$  に対する場合のみ扱われるということがわかった。不都合なことに、 $p \neq 2$  に対する詳細な解析がなされえないのは、ビーム・ビーム力における非線型項が含まれねばならないからである。すぎたことかもしれないが、我々は2つの刺激的な仮定をする。

— 一つのそして唯一つの単一粒子の運動を優勢にする合理的な数  $\frac{n}{p}$  が存在する。

— “調和のとれた近似” (後に理解される) が保たれる。 (28)

これらの仮定が刺激的であるのは、 $\nu$  が  $\frac{n}{p}$  に正確に等しくないかぎり、 $\frac{n}{p}$  よりも  $\nu$  により近い、より合理的な数が無限に存在するにちがいないからである。人は  $p$  より小さい値は、 $p < 10$  とすると、考慮に入れるに値すると議論するが、10より高い大きさの共鳴は粒子の運動にそんなに影響しないからである。これは部分的に後で正当化される。次に、“調和化する”手順はある物理的な現象を研究することから除外するが、その一例は“確率的な層”が位相空間中

に存在することである。

次に我々は仮定 (28) を強調しよう。静的単一共鳴モデルはそれに対して、 $\nu$  と  $\omega$  という変数が同時に静的であるということがまず議論される。解析の方法はこのモデルにおいてよく定義されていて、詳細にわたっている。不都合なことに、このモデルに従えば、ビーム・ビーム摂動に反して、粒子の運動はいつも安定であり、実験的に一致しないことには、ビームが衝突するときにビームの寿命の減少が観察される。

この差を説明するために、我々は2つの他に取りべき道があるようにみえる。一つの取るべき道は、2つの仮定 (28) を保つが、静的モデルを修正して、時間に従属する変数を含めるようにすることである。

### 3・1 静的モデル

ビーム・ビーム摂動の影響のもとにおける粒子の運動は次のハミルトニアンによって記述される。

$$H = \frac{1}{2} (P_x^2 + K_x x^2) + \frac{1}{2} (P_y^2 + K_y y^2) + U(x, y) \delta(s) \quad (29)$$

ここで  $U(x, y)$  は Eq (2) で定義されていて、方位角の座標軸  $s$  が定義されているので、ビーム・ビーム衝突は  $s=0$  で起こる。運動方程式は

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + K_z(s) z = -\frac{\partial U}{\partial z} \delta(s), \quad z=x, y \quad (30)$$

我々が単一共鳴近似を適用する前に、我々は3つの連続する正準変換をこのハミルトニアンにほどこななければならない。クーラント・スナイダー変換と作用変換と、低速変数変換とである。それぞれの変換を個々に行う必要はない。3つの変換は一つに結合され、その母関数は次のようになる。

$$G(x, y, \Psi_x, \Psi_y) = -\frac{x^2}{2\beta_x(s)} \left[ \tan \phi_x - \frac{\beta'_x(s)}{2} \right] - \frac{y^2}{2\beta_y(s)} \left[ \tan \phi_y - \frac{\beta'_y(s)}{2} \right] \quad (31)$$

ここで、 $\phi_z = \Psi_z + \nu_{z0} \frac{s}{R} + \int_0^s ds' \left( \frac{1}{\beta_z(s')} - \frac{\nu_z}{R} \right)$ ,  $z=x, y$

又ここで、 $\beta_{x,y}$  はベーター関数で、 $2\pi R$  はストーリッジリングの円周であり、 $\phi_{x,y}$  はベーターatron位相で、 $\nu_{x0}$  と  $\nu_{y0}$  は共鳴同調振動数で、 $\nu_x \approx \nu_{x0}$ ,  $\nu_y \approx \nu_{y0}$ ,  $q\nu_{x0} + p\nu_{y0} = n$  ( $p, q, n$  は整数) を満たす。 $\phi_{x,y} \approx \nu_{x,y0} \frac{s}{R}$  なので、 $\Psi_{x,y}$  は同時にゆっくりと変化する。変換前の正準変数は  $x, p_x, y, p_y$  である。変換後の正準変数は  $\Psi_x, J_x, \Psi_y, J_y$  である。2つの座標の組みは次のように関係付けられる。

$$z = \sqrt{2J_z B_z} \cos \phi_z$$

$$p_z = \sqrt{\frac{2J_z}{\beta_z}} \left[ \sin \phi_z - \frac{\beta'_z}{2} \cos \phi_z \right], \quad z=x, y \quad (32)$$

正準変換の後のハミルトニアンは

$$K = (\nu_x - \nu_{x0}) J_x + (\nu_y - \nu_{y0}) J_y + K_1 \quad (33)$$

ここで、

$$K_1 = \delta(\theta) U [\sqrt{2J_x\beta_x} \cos(\Psi_x + \nu_{x0}\theta), \sqrt{2J_y\beta_y} \cos(\Psi_y + \nu_{y0}\theta)]$$

我々は時間変数を  $s$  から  $\theta = \frac{S}{R}$  へ変えた。 $K_1$  における  $\beta_{x,y}$  の値は衝突点で取られている。

ここまでは、近似はなされていない。我々は以前に述べた2つの仮定をしよう。すなわち (1) 一つのそして唯一つの整数の組  $q, p$  と  $n$  を考え、 $q\nu_x + p\nu_y \approx n$  としよう。そして (2) ビーム・ビーム摂動ハミルトニアン  $K_L$  を速く振動する項とゆっくり変化する項にわけ、速く振動する項が無視される調和的近似をしよう。

摂動ハミルトニアン  $K_1$  は次のようにフーリエ級数に分解される。

$$K_1 = \sum_{\alpha, \beta = -\infty}^{\infty} f_{\alpha\beta}(J_x, J_y) e^{i\alpha(\Psi_x + \nu_{x0}\theta) + i\beta(\Psi_y + \nu_{y0}\theta)} \frac{1}{2\pi} \sum_{\gamma} e^{i\gamma\theta} \quad (34)$$

$K_1$  のゆっくり変化する項は Eq (34) で表わされる項であり、エクスポネンシャルの肩の  $\alpha = kq, \beta = kp, \gamma = -kn$  をみたま。  $K_1$  において、これらの項を Eq (34) に代入すると、

$$K_1 \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{(kq)(kp)}(J_x, J_y) e^{ik(q\Psi_x + p\Psi_y)} \quad (35)$$

となる。我々が共鳴条件  $kq\nu_x + kp\nu_y = kn$  ( $n$  は任意の整数) に対応するすべてのゆっくりと変化する項を含めていることに注意しよう。次のフーリエ級数と、

$$f_{(kq)(kp)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta_x \int_0^{2\pi} d\theta_y e^{-ikq\theta_x - ikp\theta_y} \times U(\sqrt{2J_x\beta_x} \cos\theta_x, \sqrt{2J_y\beta_y} \cos\theta_y)$$

Eq (2) からの  $U$  の明確な表現を Eq (35) に代入して、 $k$  についての和を取ると

$$K_1 \approx -\frac{1}{4\pi^2} \frac{N\gamma_0}{\gamma} \int_0^{2\pi} d\theta_x \int_0^{2\pi} d\theta_y \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(q\theta_x + p\theta_y - q\Psi_x - p\Psi_y + 2\pi s) \quad (36)$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(\sigma_x^2 + t)(\sigma_y^2 + t)}} \left\{ \exp \left[ -\frac{J_x\beta_x \cos^2\theta_x}{\sigma_x^2 + t} - \frac{J_y\beta_y \cos^2\theta_y}{\sigma_y^2 + t} \right] - 1 \right\}$$

Eq (36) は  $p, q, q\Psi_x + p\Psi_y, \frac{J_x\beta_x}{\sigma_x^2}, \frac{J_y\beta_y}{\sigma_y^2}, \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$  のような次元のない量によっているが、次元のない因子を  $N\gamma_0/\gamma$  に掛けて、得られる。 $q\Psi_x + p\Psi_y$  と  $J_z\beta_z/\sigma_z^2 \equiv a_z, z=x, y$  という量は、粒子の座標軸を記述する力学的な量である。ハミルトニアン  $K$  から得られ、 $q\Psi_x + p\Psi_y, \sigma_x, \sigma_y$  によって書かれた運動方程式は、次の次元のない項を含んでいる。

$$\frac{N\gamma_0\beta_x}{\gamma\sigma_x^2}, \frac{N\gamma_0\beta_y}{\gamma\sigma_y^2}, \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, p, q, q\nu_x + p\nu_y = n$$

はじめの3項は次の項によっておきかえられ

$$\xi_x = \frac{N\gamma_0\beta_x}{2\pi\gamma\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)}, \xi_y = \frac{N\gamma_0\beta_y}{2\pi\gamma\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)}, \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

他の3つの量は  $\nu_x$  と  $\nu_y$  の値から決定される。このように、単一共鳴モデルは完全スケーリング変数  $\xi_x, \xi_y, \nu_x, \nu_y, \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$  によって完全に記述される。

次に、我々はビーム・ビーム相互作用による  $x-y$  結合を無視して、粒子の垂直運動のみを考えてみよう。この場合のハミルトニアンは、 $\sigma_x \gg \sigma_y$  で  $q=0$  と定めて、Eq (36) から得られる。単一共鳴モデルに含まれる共鳴項は

$$\nu \approx \frac{\pm n}{\pm p}, \frac{\pm 2n}{\pm 2p}, \frac{\pm 3n}{\pm 3p}, \dots \text{etc}$$

である。ハミルトニアンは

$$K = \left(\nu - \frac{n}{p}\right) J + K_1(J, \Psi)$$

であり、



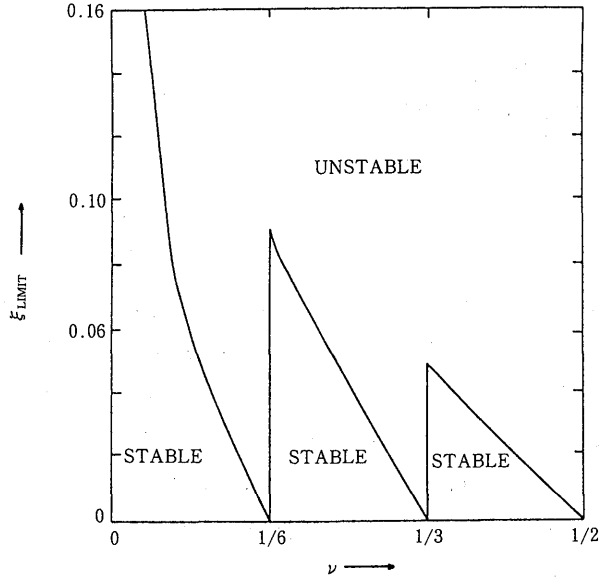


Fig. 7 6つのパンチに対する  $(\nu, \xi)$  平面の中の大極子モードのコヒーレント振動に対する安定性の領域

$$K_1 = -\frac{\xi}{\beta} \sum_{s=0}^{p-1} \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{t}{\sigma_y^2}}} \left\{ \exp \left[ -\frac{\alpha \cos^2 \left( \Psi - \frac{2\pi s}{p} \right)}{1 + \frac{t}{\sigma_y^2}} \right] - 1 \right\}$$

$$\alpha = J\beta/\sigma_y^2 \quad (37)$$

となる。我々は添字  $x$  を省略した。摂動ハミルトニアン  $K_1$  は  $n$  に独立である。これはビーム・ビーム摂動が  $\delta$  関数的はねかえりであるという事実によっている。

$K_1$  を  $\Psi$  のフーリエ級数に展開するのが習慣になっている。結果は、

$$K_1 = -\frac{N\gamma_0\sigma_y}{\pi\gamma\sigma_x} \left\{ 1 + \sum_s' G_{sp}(s) \cos sp\Psi \right\}$$

であり、ここで

$$G_{sp}(\alpha) = (-1)^{\frac{sp}{2}} \frac{2}{(1 + \delta_{s0})(s^2 p^2 - 1)} e^{-\frac{\alpha}{2}} \left[ (1 + \alpha) I_{\frac{sp}{2}} \left( \frac{\alpha}{2} \right) + \alpha I'_{\frac{sp}{2}} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (38)$$

但し、 $\sum'$  は 0 から  $\infty$  までの和を示し、 $sp = \text{偶数}$ 、 $\delta_{s0}$  はクロネッカーデルタ関数で、 $I_{\frac{sp}{2}}$  はベッセル関数である。もし  $p$  が奇数ならば、 $p$  の大きさの共鳴に対する摂動ハミルトニアンは  $2p$  の大きさのそれに等しいということに注意しよう。時には我々が、フーリエ展開 (38) の最初の 2 項のみを保つということに注意しよう。これは、 $\nu$  が  $\pm n/\pm p$  に近く、 $\pm 2n/\pm 2p$ 、 $\pm 3n/\pm 3p$  等からはほど遠いという近似に基づいている。我々がこの近似をしないことに決定したのは、 $\pm n/\pm p$  は  $\pm 2n/\pm 2p$  等にひとしいことを発見したからである。Eq (38) 中に偶数項だけが現われるのは、対称なパンチの正面衝突を仮定したという事実によっている。

ハミルトニアン K から得られる運動方程式は,

$$\Psi' = \nu - \frac{n}{p} - 2\xi \sum_s G' sp(\alpha) \cos sp \Psi \quad (39)$$

$$\alpha' = 2\xi \sum_s sp G sp(\alpha) \sin sp \Psi$$

であり, 粒子の運動は2つのスケーリング変数  $\nu$  (そしてそれゆえ  $p$  と  $\nu - \frac{n}{p}$ ) と  $\xi$  によって完全に記述される。

$\Psi'$  の右辺の3番目の項はそのおそい座標軸が  $\alpha$  と  $\Psi$  である粒子の有効同調振動数変化を与える。 $\alpha \rightarrow 0$  を持つ小さい振巾粒子に対して, もし  $p$  が1又は2で  $\xi$  はその他であれば, それは  $\xi(1 + \cos 2\Psi)$  となる。 $\sum'$  の和を取るときに,  $s=0$  の項は“同調を破る”ふるまいを定義する。

$$\Delta\nu(\alpha) = -2\xi G' sp(\alpha) = \xi e^{-\frac{\alpha}{2}} \left[ I_0\left(\frac{\alpha}{2}\right) + I_0'\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \quad (40)$$

同調を破る振動数  $\Delta\nu$  は考えている共鳴のもとにおける  $p$  に独立であることに注意しよう。 $\alpha = 0$  を持つ粒子は摂動の同調振動数  $\nu + \xi$  を持ち,  $\alpha \rightarrow \infty$  の粒子は同調振動数  $\nu$  を持ち, 0 と  $\infty$  の間の  $\alpha$  を持つ粒子は  $\nu$  と  $\nu + \xi$  の間の同調振動数を持つ。和の残りの項は“共鳴巾”を定義する(同調振動数の単位において):

$$\delta\nu_p(\alpha) = 4\xi \sum_{s \neq 0} |G' sp(\alpha)| \quad (41)$$

与えられた振巾  $\alpha$  と任意の位相  $\Psi$  を持つ粒子の集合の有効同調振動数は同調を破る振動数  $\nu + \Delta\nu(\alpha)$  のまわりに  $\pm \delta\nu_p/2$  の範囲内の広がりをおさめる。粒子の運動における共鳴の影響は Fig 8 に質的に描かれている。振巾  $\alpha$  を持つ粒子は, もし  $\nu + \Delta\nu(\alpha)$  が影の領域の内部にあるならば, 共鳴によって強く影響される。

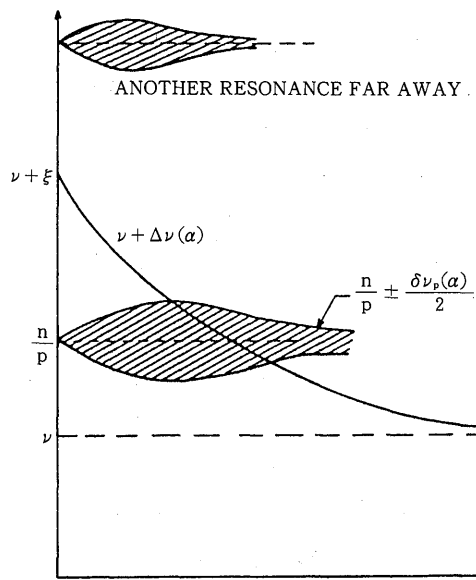


Fig. 8 粒子の運動への単一共鳴の影響を示す質的描写。 $\Delta\nu$  は同調の破れで,  $\delta\nu_p$  は共鳴の巾である。

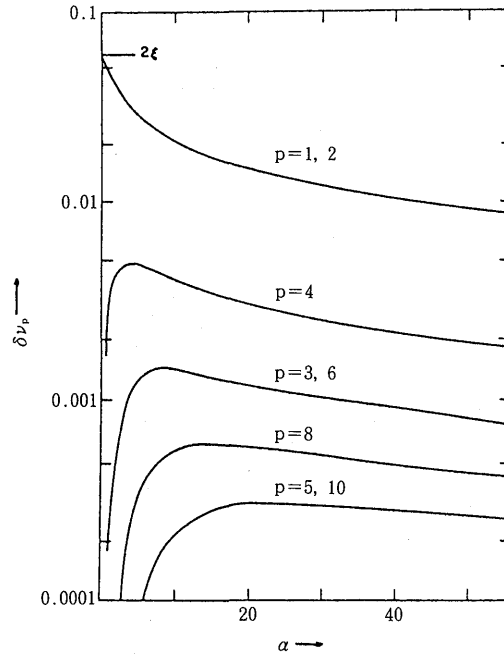
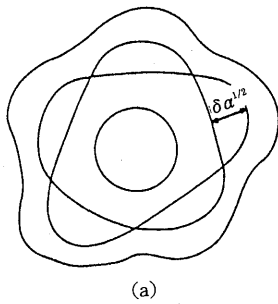
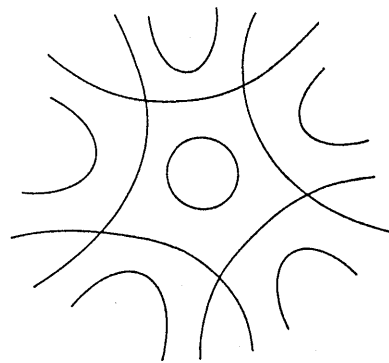


Fig. 9  $\xi=0.03$ といくつかの  $p$  の値に対する粒子の振巾  $\alpha$  に対する共鳴巾  $\delta\nu_p$



(a)

Fig. 10a 安定な粒子運動



(b)

Fig. 10b 不安定な粒子運動

位相空間内における粒子の軌跡は一定のハミルトニアン等高線に従う。トポロジー的に、2つの型の一定のハミルトニアン等高線があり、Fig10aと10bに描かれている。もし等高線がFig10aのようであれば、粒子の運動は安定であるが、それは振巾が常に境界線に囲まれているからである。等高線がFig10bのようであれば、安定ではない。

ビーム・ビーム相互作用の場合に対して、 $J$ の大きな値でEq (37) のハミルトニアン  $K$  を考

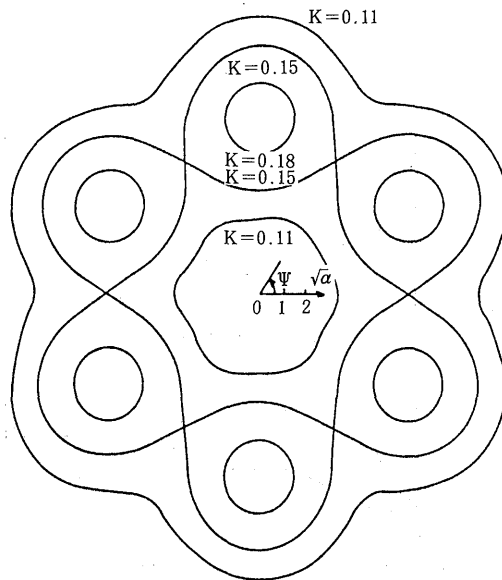


Fig. 11 ビーム・ビーム相互作用に対する一定値ハミルトニアン等高線。粒子の運動は安定である。

えよう。 $J \rightarrow \infty$ のとき、 $K_1 \propto \sqrt{J}$ は $(\nu - \frac{n}{p})$  J項によって支配され、大きい振巾での一定値のハミルトニアン等高線は円であることを示している。物理学的に、大きい振巾で衝突点を横切りつつある粒子はやってくるビームから小さな摂動を経験する。一つのビーム・ビーム位相空間トポロジーの明確な例が $p=6$ ,  $\nu - \frac{n}{p} = -0.01$ ,  $\xi=0.06$ について Fig11に示されている。

### 3・2 力学的モデル

前節で、我々は同時に $\nu$ と $\xi$ のようなビーム・ビーム変数が一定値にとどまるような、静的単一共鳴モデルが不安定性の仕組みを持たないことを知った。これはいくらか期待はずれで、実験観察と一致しない。この節において、我々は簡単に、静的モデルに時間変化をする変数を含めるように修正する可能性を議論しよう。そのような力学的単一共鳴モデルが不一致をうまくいいのがれることを希望する。

研究してきたように、2つのタイプの時間従属性があるようにみえる。第一番目の型において(標的飛ばしモデル)、ビーム・ビーム変数は同時に、ある振動数を多かれ少なかれ正弦的に調節し、一方2番目の型においては(発散モデル)、変数の発散のふるまいはビーム・ビーム不安定性の源となると考えられる。それぞれのモデルは、小さいベータートロン振巾からより大きい振巾へ連続的に粒子を導く仕組みを示している。振巾についての物理学的穴の直径限界は衝突するビームの中の粒子の損失の観察を説明している。議論を簡単にするために、我々は電子-陽電子衝突の場合を考え、時間変化をする変数が同調振動数 $\nu$ であると仮定する。

我々はまず標的飛ばしモデルを考えよう。静的モデルにおいて、位相空間における一定値の

ハミルトニアン等高線にそって、粒子は流れる。これら等高線におけるトポロジーは、ハミルトニアンによっており、Eq (37) から、順番に共鳴からの距離  $\nu - \frac{n}{p}$  によっている。標的飛ばし

モデルにおいて、粒子の同調振動数は、共鳴値  $\frac{n}{p}$  のまわり又は近くをゆっくりと振動する。結果として、共鳴は Fig11 に示されるように、島が散在するように、準静的に内へそして外へと動き、そしてそうしているときに、位相空間要素をゆがめたり、配置しなおす。これらの条件のもとにおける粒子運動の解析は、極端にむずかしい。粗っぽい質的記述として、しかしながら我々は共鳴によって標的飛ばしにされようと、されなかりと、粒子が小さい振巾から大きい振巾へ動く島であることに注意しよう。標的飛ばしにされた粒子に対して振巾は島とともに大きくなる。標的飛ばしにされない粒子に対して、振巾は本質的に通り過ぎる島によって摂動されない。粒子の損失は、粒子を標的飛ばしにして、物理学的穴の直径の極限へ持っていく島を持つ結果である。

振巾  $\alpha$  の粒子は通り過ぎる島によって標的飛ばしにされる確率を決定するために、人は島の総面積  $A_0$  を知り、島の振巾  $\alpha_0'$  の同時に起こる成長を知る必要がある。

もし同調振動数がすべての意味のある共鳴からはるかに離れるならば、上の結果は、もし和  $\Sigma'$  において、 $s=0$  の項のみを保つならば、なお適用される。この特殊な場合において、同調の破れは、Eq (40) と同じであるが、共鳴巾はない。 $\alpha$  が運動定数であることは、Eq (39) からわかり、摂動同調振動数  $\nu + \Delta\nu$  は  $\alpha$  のみによっているので、ビームの同調振動数の分布は、ひとたび  $\alpha$  の分布が知られると得られる。

Fig 9 において、我々は  $\delta\nu_p$  を粒子の振巾  $\alpha$  に対して、 $\xi=0.03$  と  $p$  の数個の値に対して描いた。奇数の  $p$  に対しては、 $\delta\nu_p$  は  $\delta\nu_{2p}$  と同じである。偶数の  $p$  に対して、 $\delta\nu_p$  はより大きい  $p$  に対する方が一般的に小さい。これは部分的に Eq (28) においてなされた仮定を正当化する。

時には分離された線にそって  $\alpha^{\frac{1}{2}}$  の最大値と最小値の間の相違となる (Fig10a と 10b を見よ)、 $\alpha^{\frac{1}{2}}$  を単位として測った共鳴巾  $\delta\alpha^{\frac{1}{2}}$  を定義することはより好都合なことである。分離された線のまわりに、 $\alpha_0^{\frac{1}{2}}$  が  $\alpha^{\frac{1}{2}}$  の平均値になるようにしよう。 $\delta\alpha^{\frac{1}{2}}$  は粗っぽく次のように与えられる。

$$\delta\alpha^{\frac{1}{2}} \approx \left( \frac{\sum'_{s \neq 0} |G_{sp}(\alpha_0)|}{2\alpha_0 |G_{sp}''(\alpha_0)|} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

この定義のもとに、我々はもはや粒子の振巾  $\alpha$  についての共鳴巾の依存性について興味を持たない。

Fig 12 は島がある速さで、この振巾をとおして、掃く粒子の振巾  $\alpha$  の関数として標的飛ばしの確率  $P_T$  の期待されるふるまいを描いている。 $P_T$  は小さな  $\alpha$  に対して、 $\alpha$  とともに増加し、大きい  $\alpha$  に対して、 $\alpha$  とともに減少する。ピークは  $\alpha$  のある値のまわりで、考えている共鳴  $p$  の大きさに依存して、生ずる。典型的な粒子の標的飛ばしの場合、次のようであろう：位相空間において、島が外側に向かって動いているときに、それら標的飛ばしの効果が増大し、相対的

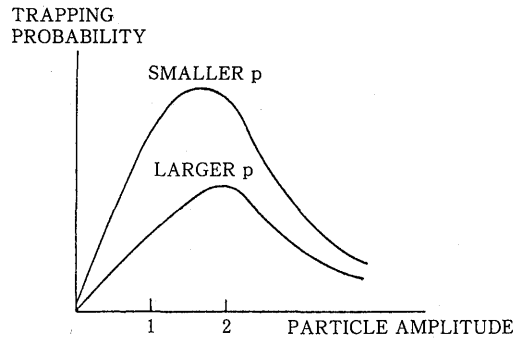


Fig. 12 動いている位相空間島によって粒子が標的飛ばしにされる確率の平均的ふるまい。

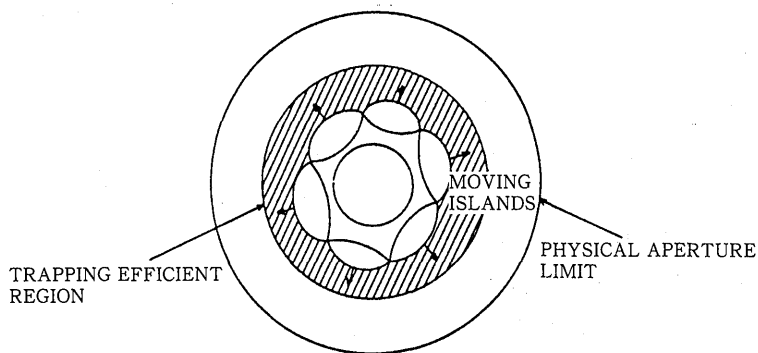


Fig. 13 ゆっくり変化する位相空間トポロジーによって大きい振巾へ移行する粒子の可能な仕組み。

に小さい振巾（すなわち、 $\alpha \sim 0.5$ ）で粒子を標的飛ばしにする。粒子はそこで、島とともに、一緒に外側へ動く。さらに島が外向きに動くと、それらの標的飛ばし効果は減少しはじめ、そして島は漏電する。粒子はそこで、大きい振巾（すなわち、 $\alpha \sim 5$ ）で島から落される。我々はこの過程を Fig 13に描く。影の領域は標的飛ばしが有効である区域を示す。この区域の外側で、島は漏電する。穴の直径の限界は影の区域の内側又は外側でありうる。この仕組みが衝突するビームの寿命の観測された減少を説明出来るであろうと、標的飛ばしモデルで信じられている。この標的飛ばし機能は又ビームの分布における可能なハロー構造を示している。

標的飛ばしモデルにおいて仮定された時間調節はいくつかの源からくる。例えば、同調振動数は、色収差効果による粒子のエネルギーに従ってシンクロトン振動数  $f_s$  を加減することが出来るし、又、パンチの長さが衝突点でのベーター関数と比べて小さくなければ、変数  $\xi$  は振動数  $2f_s$  を持つ粒子の縦方向位置によって調節される。

2 番目の型の力学的単一共鳴モデルは発散モデルである。電子ビームのいつもの輻射減らしと量子発散効果の存在において、粒子の分布は平衡状態  $\rho$  に達する。摂動がなければ、粒子の

振巾において $\rho$ はガウス分布をする。ビームの量子寿命は物理的穴の直径の限界を越えて、この分布の発散割合によって決定される。単一共鳴の存在によって、位相空間の歪が又平衡分布を歪めるであろうことが考えられる。それゆえ、与えられた穴の直径の極限に対して関連する量子寿命が縮小される。発散の減少と単一共鳴分布を同時に考慮に入れて、 $\rho$ に対して、フォッカー・プランク型の発散方程式を解く必要があることは、明らかである。2, 3の企てがこの分布に対してなされているが、しかし不都合なことに、大変むずかしい数学に妨げられている。それにもかかわらず、例えば

$$\xi \sim \exp(-gK) \quad (43)$$

と書こう。ここで、 $K$ はEq (37)において見出されたハミルトニアンである。もし我々が、

$$g = \frac{\beta}{\left| \nu - \frac{n}{p} \right|} \sigma_0^2$$

を選ぶならば、ここで $\beta$ はベーター関数で、 $\sigma_0$ はビーム・ビーム摂動の不存

在における自然なビームサイズ巾であり、この表現は $\xi \rightarrow 0$ の極限で正しいガウス分布に還元される。もしビーム・ビーム摂動がそんなに強すぎなければ、Eq (43)は近似的に有効であり、 $p \left| \nu - \frac{n}{p} \right| \gg \xi$ である。非減少と非発散と任意の $\xi$ の極限において、それは又正しい。これらの条件のもとで、我々は共鳴巾 $\delta\alpha^{\frac{1}{2}}$ の大きさと適当に短くされたビームの寿命の粗っぽい総計によって、有効物理的穴の直径の極限が改善されることを期待する。

粒子分布の平衡、Eq (43)がハミルトニアンがちょうど含んでいるように、島の構造を含むことに注意しよう。もし同調振動数がすべての共鳴からほど遠ければ、ビーム・ビーム摂動は $\alpha' = 0$ に保っている間に、 $\Psi'$ における位相方向の流れの項の方程式に寄与し、ビームの寿命はその場合には影響されない。

上に述べた発散の仕組みは、量子発散とはならない。運動量の発散は、例えばビームの内側の散乱によっておこされ、色収差効果によって、同調振動数発散の原因となりうる。

単一共鳴理論に対して典型的な、 $\nu - \frac{n}{p}$ ,  $p$ ,  $\xi$ のようなこれら変数に加えて、力学的モデルは2, 3のより多くの変数がビーム・ビーム安定性の限界を決定する重要な候補となるであろうことを暗示する：シンクロトロン振動数 $f_s$ と色収差 $C$ と物理的穴の直径の限界 $A$ である。

#### 参考文献

A. W. Chao "A Summary of Some Beam-Beam Models" AIP Conference Proceedings Number 57 "Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction" (Brookhaven National Laboratory, 1979) p. 42

(原稿受理 1993年11月29日)