

# 102 GeV/c での陽子—陽子衝突

宮本 道子

## Summary

### Proton-Proton Collisions at 102 GeV/c

Michiko Miyamoto

I summarized Prof. P. Slattery's work.

It is described in this paper that proton-proton collisions carried out using the NAL 30 inch bubble chamber. The value of bubble chamber for disentangling a highly complex interaction is illustrated in Fig. 9. An analysis of experimental results using this bubble chamber at high energy is reported.

P. Slattery 教授著の“PROTON—PROTON COLLISIONS AT 102 GeV/c”をまとめました。

### (I) 概 略

NAL<sup>60</sup>30インチ泡箱を用いた 102 GeV/c の陽子—陽子衝突の解析からの予備的な結果を議論しようとしている。PP→P+……と、PP→ $\pi^+$ +……に対する単一粒子包含的スペクトルを紹介し、NAL とそれよりもっと低いエネルギーの加速器によってなされた他の高エネルギー実験からの対応するデーターとの比較をしようとしている。

### (II) 序 論

この会議での開会の講演は、すべて NAL 30 インチ泡箱を用いて達成された、陽子—陽子衝突の研究に基づいている。今日までに、102 GeV/c と 205 GeV/c と 303 GeV/c の異なる 3 つのエネルギーについてなされ、4 番目は 405 GeV/c に対して計画されている。これらの講演での重複を最小にするために、エネルギーごとというよりはむしろ、物理学の話題になる入手出来るデーターをこれらの講演者が紹介することが非公式になされた。結果的に、この講演において、私は 102 GeV/c で得られた結果を議論しようとしているだけでなく、(表 I にはこの実験に寄与した物理学者を示した)、私は他の 2 つの NAL 30 インチ泡箱による陽子—陽子衝突実験の得られたあるデーターをも紹介しようとしている。

Table I List of Contributing Physicists

102 GeV/c pp Collisions	
University of Michigan	University of Rochester
J. Chapman	C. Bromberg
N. Green	D. Cohen
B. Roe	T. Ferbel
A. Seidl	P. Slattery
J. Vander Velde	

### (III) PP→P+……反応

PP→P+……反応を研究するための30インチ泡箱の利用は、Fig. 1 によって議論するのが便利である。Fig. 1 は重心系の変数  $X = 2 P_T^* / \sqrt{s}$  と  $Pt^2$  に対する陽子の一定の実験室系運動量の等高線を示している。実験室系運動量  $P \leq 1.2$  GeV/c の陽子は、目に見えるイオン化と考えられる現象によって、泡箱の中に常習的にみわけられるので、我々は Fig. 1 の外側の曲線の下と左側では、小さな泡箱の中でさえ、斜線にはならないことがわかった。物理学的データーの  $Pt^2$  の急速な降下によって、(この特徴は、Fig. 2 に 102 GeV/c に対するデーターに対して図解されており； $\sim 7.5$  (GeV/c)<sup>2</sup> の実験的  $Pt^2$  に対する分布の勾配は、陽子に反跳された質量損失の強い関数となって現われないということに注目せよ)。我々はそれゆえ、 $X \leq -.5$  に対して本

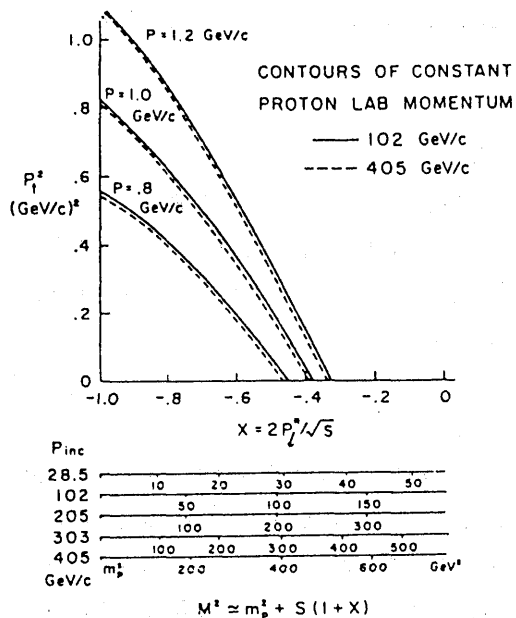


Fig. 1. Contours of constant proton lab momentum.

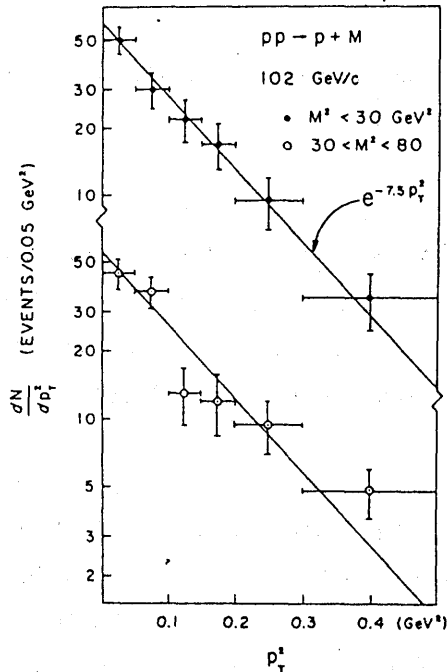


Fig. 2.  $P_t^2$  distribution at 102 GeV/c.

質的に無視しうる、上記カット・オフによって、実験的斜線が紹介されたという、重要な結果をうる。高い入射運動量では、その上 Fig. 1 に示された等高線は、102 GeV/c と 405 GeV/c の間に生ずる極端にわずかな変化によって、エネルギーに唯、弱く依存していることが、グラフに示されている。

$X=0$  の近傍を除いて、陽子から反跳された質量の 2 乗は  $X$  に  $M^2 = m_p^2 + S(1+X)$  という式によって関係付けられるが、ここで、 $S \approx 2m_p(P_{inc} + m_p)$ 、 $m_p$  は陽子の質量で、 $P_{inc}$  はビームの運動量の大きさである。この関係を用いて、質量の 2 乗の大きさは、この講演に関する  $P_{inc}$  のいろいろな値に対して、Fig. 1 に描かれている。すでに観察したように、NAL のエネルギー範囲においては、実験的斜線は非常に高い  $M^2$  の値に対してのみ決められている。

Fig. 3 は、より低いエネルギーである  $P_{inc} = 28.5$  GeV/c でと同様に、3 つの現在入手出来る PP 衝突実験に対する観察された  $M^2$  スペクトルを与える（このグラフと、すべての補助的なグラフにおいて、弾性散乱の場合は除外されている）。示された分布は、高い  $M^2$  の値でのカット・オフが  $P \leq 1.2$  GeV/c という制限の影響である 28.5 GeV/c を除いて偏寄ってはいない。3 つの高エネルギー実験は、比較的平らな“バックグラウンド”の分布に反して、小さい質量にピークがはっきりとあらわれることによって特徴付けられる。一方、このピークがどんな特別な場合をどれぐらい示すかということとははっきりせず、与えられたデータは、観察されたことは、エネルギーにほとんど独立な  $6 \pm 1$  mb という断面積を持ち、小さい質量でのピークに一樣に減少するバックグラウンドの寄与をするという生成であるという仮定と矛盾しない。

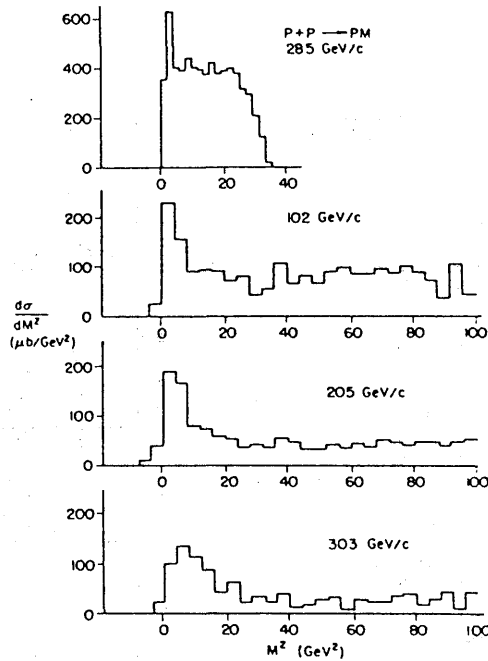


Fig. 3. Distribution of  $\frac{d\sigma}{dM^2}$  at 28.5, 102, 205, and 303 GeV/c.

3つのNAL実験で観察されたピークの幅は特別な注目に値する。与えられたSの値で、 $\delta M^2$ は近似的に $M^2$ に独立であり、Sとともに線型的に変化するが又、結果的にこれらのエネルギーで、Pincとも、共に線型的に変化する。102 GeV/cで $\delta M^2 = .7 (\text{GeV})^2$ あり（これは一部は、弾性散乱現象を用いて推測される）、そしてそれゆえ、205と303 GeV/cでは、それぞれ $\delta M^2 \approx 1.4$ と $2.1 (\text{GeV})^2$ である。Fig. 3における一区切りの目盛の幅は $4 (\text{GeV})^2$ であるので、観察されたピーク幅は実験的に意味がある。それゆえ、次の2点に注意すべきである：(1)ピークを持つことは、それが大変幅広い質量範囲を持つので、より低いエネルギーで観察されることは、質的に異なる現象である；そして、(2)増加するビームの運動量とともに、実験的ピークの幅が広がるのが観察されるのは真実である。

これら実験のそれぞれに対して、荷電粒子の数による $M^2$ のスペクトルの変化はFig. 4に示されている。一方、統計があきらかに問題であり、102と303 GeV/cの間で減少している2粒子成分に対して一般的な傾向があらわれており、おそらく303 GeV/cで現われ始めている6粒子ピークに対するある指示を与えている。(4粒子成分は、205 GeV/cで最小のピークになっており；これは統計的に限定された標本から信頼出来る結論を導くという企てに先天的な困難のあることを示しているのみであろう)。観察された低質量のピークの $e^{-\alpha p_{\perp}^2}$ の型の性質は、すでにFig. 2によってあきらかである。より詳しいデータはFig. 5に与えられており、4粒子反応の205 GeV/c実験に対するモーメント・トランスファーの分布についてである。(こ

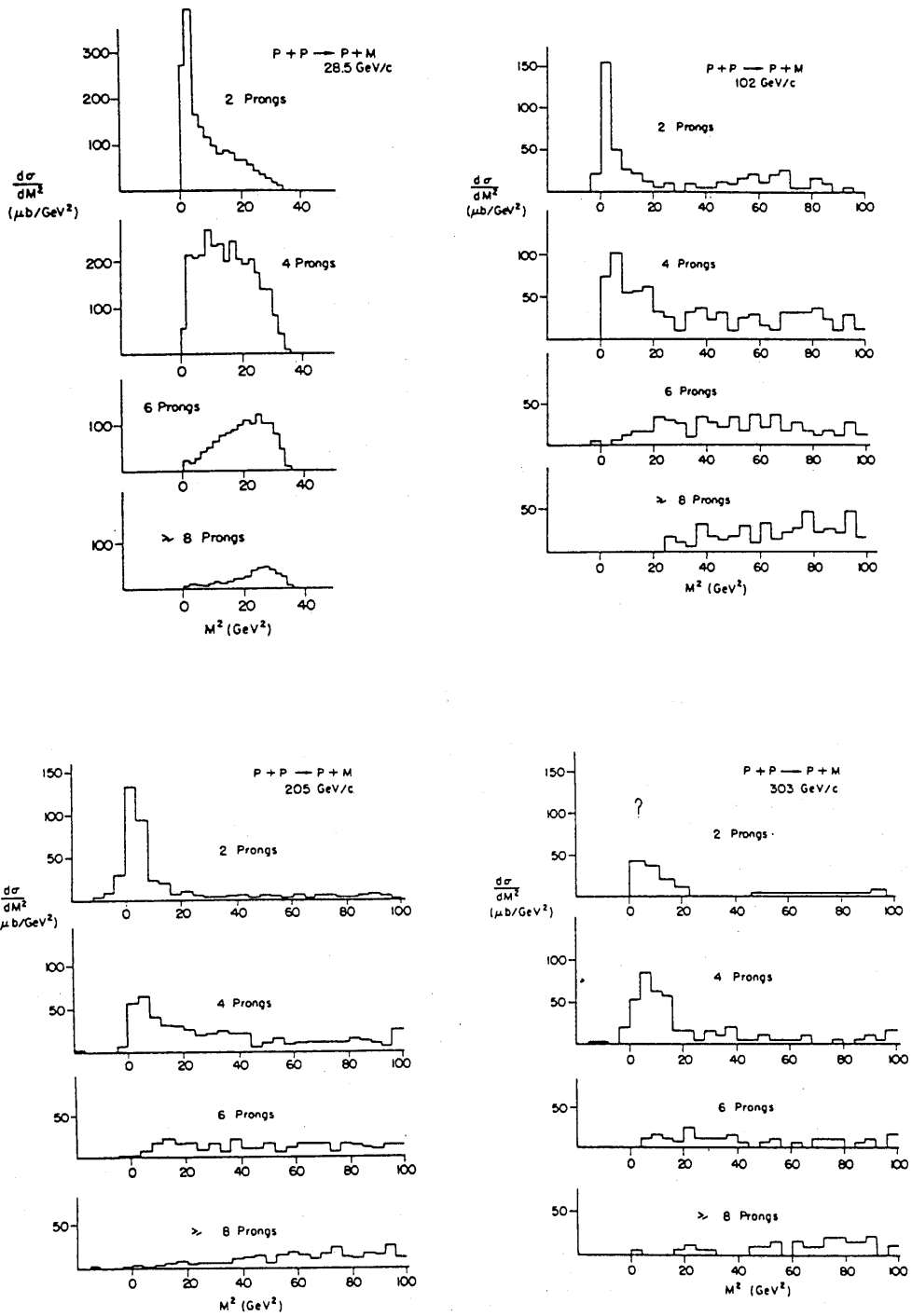


Fig. 4. Distribution of  $\frac{d\sigma}{dM^2}$  versus charged prong multiplicity at 28.5, 102, 205, and 303 GeV/c. (See footnote 6.)

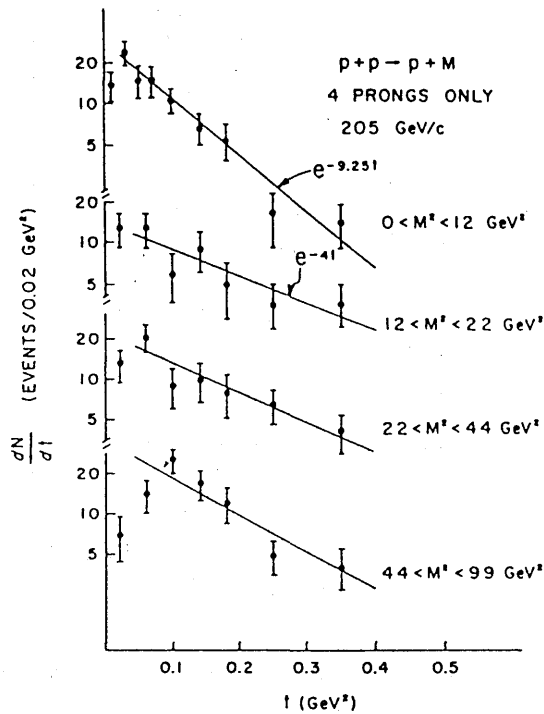


Fig. 5.  $t$  distribution for 4 prongs at 205 GeV/c.

の実験は、現在のところ、3つのNAL実験の最も高い統計を持っており、又4粒子データーには、弾性散乱の場合は含まれていない。非常に小さい $M^2$ 標本は、最も傾斜のきつい $t$ の分布( $\frac{d\sigma}{dt} \propto e^{-9.25t}$ )を持っているので、より大きい $M^2$ のデーターに対する $t$ の分布の傾斜は $M^2$ に対する強い依存性を示さな、( $\frac{d\sigma}{dt} \propto e^{-4t}$ )。( $t_{\min} \approx \left(\frac{M^2 - m_p^2}{2P_{inc}}\right)^2$ の効果は、より大きい $M^2$ の示された帯を除いて意味を持たない)。

特徴の結合：観察されたピークのしきい値の性質と、その生成のエネルギーについての近似的な独立性と、それらの $e^{-aPt^2}$ という型を持つ性質は、すべて“回折的である”というはり紙を正統化する。我々は結果的に、これらのデーターから、高エネルギー陽子—陽子衝突での回折的成分に対する強い証拠が存在するという結論に導かれる

この観察が、前述の注目した、この同じエネルギーの範囲での半包含的スケーリングのきざしと矛盾しないかどうかを問うてみることは意味あることである。Fig. 6において、荷電粒子多数発生分布のスケーリングのふるまいに対する、最近発表されたデーターを参考に示す。50, 69, 102, 205, 303 GeV/cでのデーターについて、 $\frac{n}{\langle n \rangle}$ に対する $\langle n \rangle \frac{\sigma_n}{\sigma_{inel}}$ という量をグラフは示している。一つの単調な曲線は、あらゆるデーター点をつらねて、自由度47の $\chi^2$ 分布と一致している。(横に小さく描かれているグラフは、高エネルギーデーターを記述する現象曲線と、19 GeV/cで比較するデーターである；半包含的スケーリングは、Serpuikov エネルギー

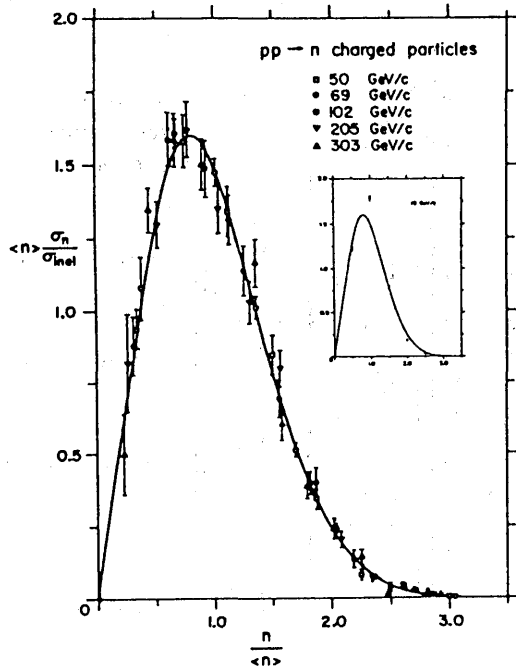


Fig. 6. Distribution of  $\langle n \rangle \frac{\sigma_n}{\sigma_{inel}}$  versus  $\frac{n}{\langle n \rangle}$  for charged particles produced at 50, 69, 102, 205, and 303 GeV/c. (See text.)

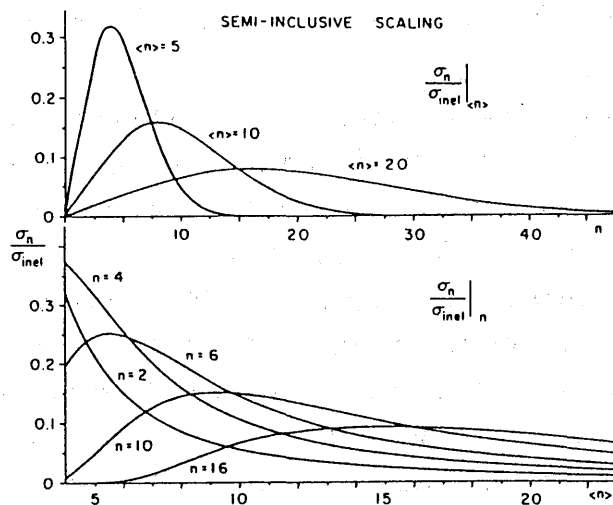


Fig. 7. Some consequences of assuming exact semi-inclusive scaling.



とそれ以上のエネルギーにおいてのみ、はっきりと決められている)。Fig. 7 は、高エネルギー荷電粒子の多数発生に対する正しい半包含的スケールリングを仮定した結果をより詳細に与えている。Fig. 7 の上のグラフは、 $\langle n \rangle$  の 2, 3 の代表的な値に対する、予言された多数発生分布を示し、一方、下のグラフは、数個の荷電粒子発生に対する  $\langle n \rangle$  の変化に対する、部分断面積の曲線を示している。注目すべき意味のある点は、すべてのエネルギーに対して、 $\frac{\sigma_n}{\sigma_{inel}}$  は、唯一つのピークを持っているということであろう；もう一つこのことは、 $\langle n \rangle \rightarrow \infty$  のとき、 $\frac{\sigma_n}{\sigma_{inel}} \rightarrow 0$  になることを要求する。非常に高いエネルギーでの総断面積の近似的に一定である非弾性部分が、固定された回折的部分と非回折的部分とから構成されている“2成分”の高エネルギー PP 衝突と矛盾しない唯一の方法は、両過程がエネルギーと共に類似の変化をする荷電粒子多数発生を与えることであり（さもなければある  $\langle n \rangle$  の値において、2つのピークがあきらかに与えられねばならない）。回折のピークにおける反応に対する、平均荷電粒子多数発生がエネルギーと共に事実増加するという実験の証拠はいく分弱い、許容すれば、これが事実、実際の状況であるという指示になろう。

これまで、私は  $PP \rightarrow P + \dots$  という反応を  $\frac{d\sigma}{dM^2}$  によって議論してきた。もう一つ、不変断面積  $S \frac{d^2\sigma}{dM^2 dt}$  について積分され、 $X \approx 1 - \frac{M^2}{S}$  に対してプロットされている Fig. 8 のようにこれらのデータを選ぶことが出来る。（この Fig. 8 のグラフに示されているデータ点は、

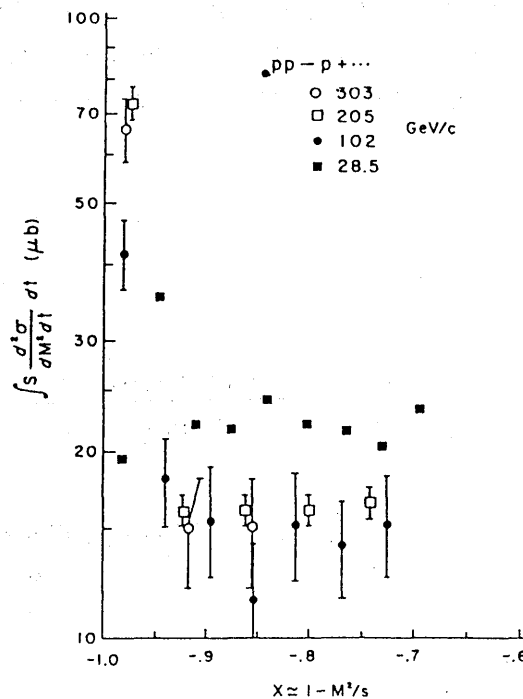


Fig. 8. Distribution of  $\int S \frac{d^2\sigma}{dM^2 dt}$  at versus  $x$  at 28.5, 102, 205, and 303 GeV/c.

Fig. 3から直接計算されたものである；それゆえ、 $X$ に対する値は実験から実験へと変化する)。このグラフに描写された意味のある特徴は、 $X \approx -1$ から離れると、高エネルギー実験は、近似的なスケージングのふるまい（ $\sim 15\%$ ）をし、そしてより低いエネルギーデータは、上方からこの“極限”に近づくとという事実である。これら観察は、Rutgers—Imperial College—Upsala College—Illinois collaborativeの $t$ の固定された値（0.33と0.45（GeV）<sup>2</sup>）に対する実験と高度な統計的結果によって矛盾しない。固定された $X$ で比較しているデータは、比較する $M^2$ の非常に異なる値を含み、その逆も又真実であるということに注意すべきである；この見解は明らかに賞賛に値するものであり、人がより有益であることを最後に確立するために残している見解である。

#### (IV) $PP \rightarrow \pi^\pm + \dots$ 反応

Fig. 9は劇的に、高度に複雑な相互作用を解決するための泡箱の意義を図解している。この衝突は生成点から放射された18個の荷電粒子と、中性子が誘発する3個の2次放射と、目に見える $K^0$ 崩壊を描写している。すべての荷電粒子の飛跡は、はっきりと区別することが出来、そして一方その解析は、いくらかたいくつではあるが、完全に測定され、又空間において、幾何学的に再構成される。私の講演のこの部分において、私はトポロジカルな組全体にわたり、完全に測定され、そして空間的に再構成されている約500のこのような衝突の標本について議論しようとしている。（補正は、はっきりした再構成がそれらに対してなされえない、非常に少数の場合に対してなされている）。しかしながら、 $PP \rightarrow \pi^\pm + \dots$ という反応についての、実験結果が与えられる前に、これら非常に高いエネルギーでの使い古した30インチ泡箱のみを用いてなしうる実験的分解能の測定の影響をまず議論することから始めよう。

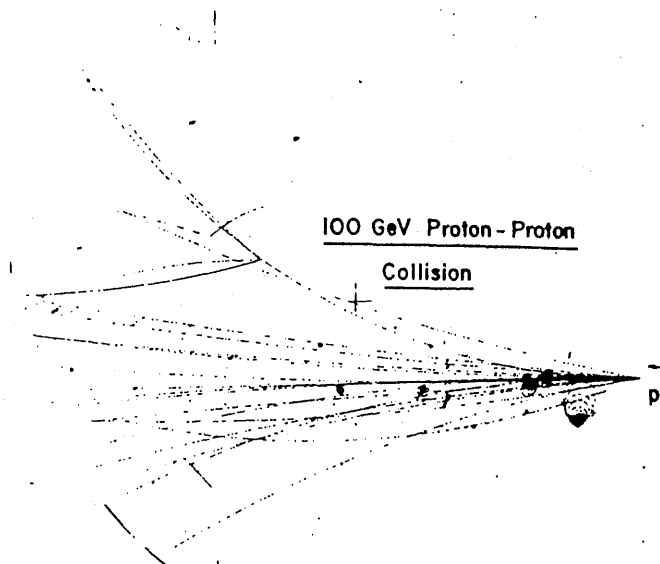


Fig. 9. High multiplicity event photographed in NAL 30 inch bubble chamber.

私は結局、 $y = \frac{1}{2} \log\left(\frac{E+P_L}{E-P_L}\right)$  という速度の変数によって、包含的  $\pi$  中間子のスペクトルについて議論しようとしている。Fig. 10 は、現在の議論に重要な運動学の大半を要約している。このスケッチにおいて、相対論的粒子の運動量は、3 辺の長さが  $P_L$ ,  $P_T$ ,  $m$  であるような直方体によって表わされている。そのような直方体の正面の対角線の長さは  $\sqrt{P_T^2 + P_L^2} = P$  (粒子の運動量である); 端面の対角線の長さは  $\sqrt{P_T^2 + m^2} = \mu$  (粒子の“垂直質量”である); そしてこの直方体の対角線は、 $\sqrt{P^2 + m^2} = E$  (粒子のエネルギーである)。三角法の操作によって、 $y = \frac{1}{2} \log\left(\frac{E+P_L}{E-P_L}\right)$  は又、 $-\log\left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^{(6)}$  に等しいことを示すことが出来る。ここで、 $\theta$  は直方体の対角線 ( $E$ ) と、この直方体の長い方の辺 ( $P_L$ ) とのなす角である ( $\tan \theta = \frac{\mu}{P_L}$ )。非常に薄い直方体 (すなわち、 $m \ll P_T$ ) に対しては、あきらかに、 $\theta \approx \theta$  である。ここで、 $\theta$  は正面の対角線と直方体の長い方の辺のなす角である ( $\tan \theta = P_T/P_L$ )。これは、よく知られた、 $\eta = -\log\left(\tan \frac{\theta}{2}\right)$  という、“宇宙線変数”による真の速度を与える。しかし、 $P_T$  の小さい値に対して (それらの厚さに比べられる幅を持つ、直方体に対応する)、断面積が最大になるが、 $y$  を  $\eta$  でおきかえることは、 $y$  を過大評価してしまう (すなわち、角度  $\theta$  は常に角度  $\theta$  よりも大きいから)。モンテ・カルロ法によって発生された  $e^{-\frac{y'}{a} - \frac{P_T}{b}}$  (ここで、 $a = \log \frac{S}{4m_p^2}$ ,  $b = 160 \text{ MeV}/c$ ) に従う、 $\pi$  中間子の分布に対する曲線がプロットされている Fig. 11 からわかるように、これは重要な問題である。連続直線は、発生された速度の分布であり、一方、破線は対応する  $\eta$  の分布である。 $\eta$  で  $y$  をおきかえた効果は、非常に高エネルギーで、中央にくぼみを生ずることがあっても、結果の分布を有意に平らにするということである。速度分布に関する、興味ある疑問の 1 つは、それがガウス分布なのか、平らなてっぺんを持つ分布なのか、どちらなのかということなので、 $y$  か  $\eta$  かどちらの変数を測定するかということが、あきらかに意味のあることである。

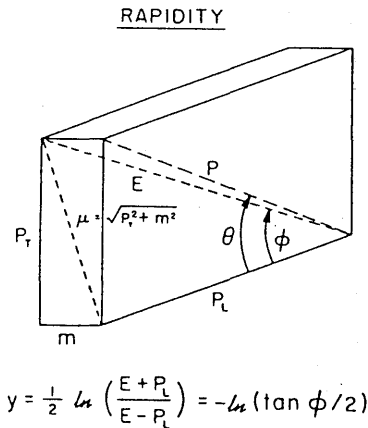


Fig. 10. Diagram illustrating geometrical definition of rapidity.

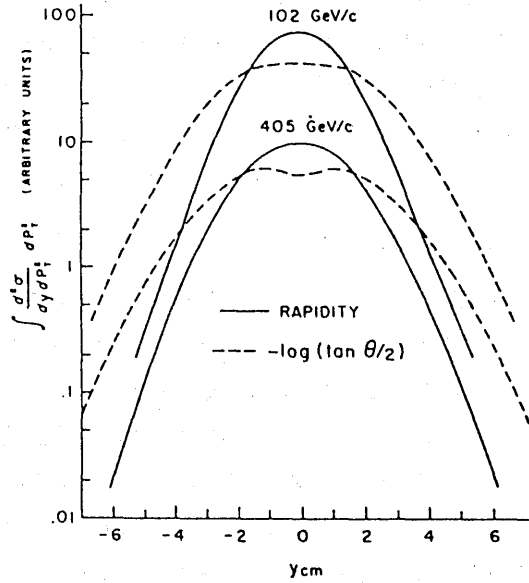


Fig. 11. Comparison between true rapidity and  $-\log(\tan \theta/2)$ .

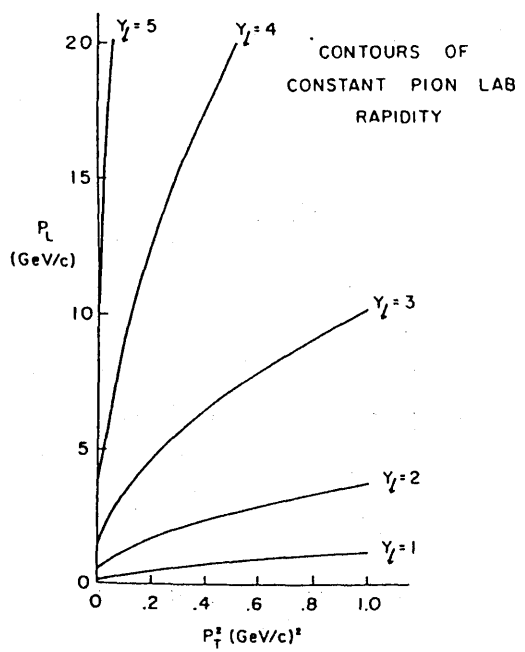


Fig. 12. Contours of constant pion lab rapidity.

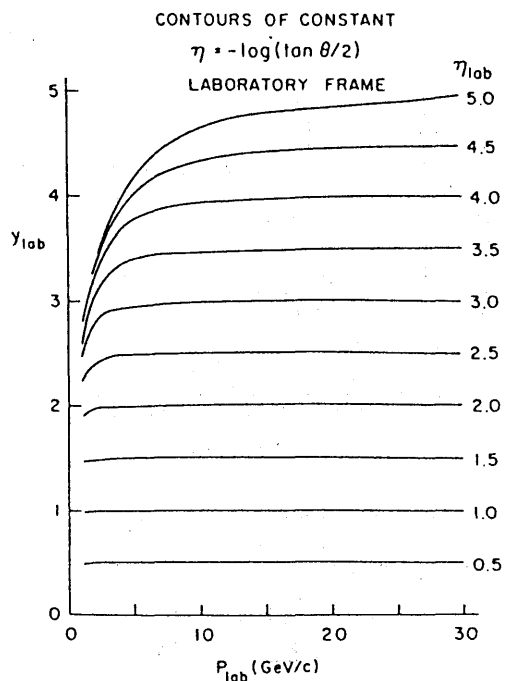
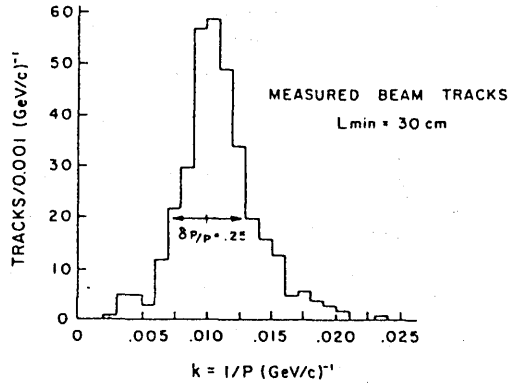


Fig. 13. Contours of constant  $-\log(\tan \theta/2)$  in lab frame.

$\eta$  という量は、問題にしている飛跡の角度にのみ依存しており； $\eta$  から  $y$  を計算するのに、飛跡の運動量を必要とする。Fig. 12 は、実験室系の量  $P_L$  と  $P_T^2$  に対する、固定された実験室系の速度の等高線を示している。 $\beta$  が、実験室系から重心系への変換を定義するとき、 $y_{lab} = y_{cm} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$  なので、与えられた等高線は又、固定された重心系の速度をあらわしている。PP 衝突のあらゆる対称性によって、それぞれ、 $P_{inc} = 102, 205, 303, 405$  GeV/c に対して  $y_{lab} = 2.69, 3.04, 3.24, 3.38$  を生ずる、 $y_{cm} = 0$  までのみの速度を測定することは、この反応に対して十分である。Fig. 12 からわかるように、正確な運動量を決定するために、これら増加する実験室系の速度の値をはるかに越えて測定しようとするれば、多くの高い運動量の飛跡の測定をますますしなければならないので、30インチの大きさの泡箱では不可能である。このことは  $\pi P$  のような非対称的反応に関するかぎり、実験方法の有用さを厳しく限定している。幸に、速度変数の運動学的性質は、 $\eta_{lab}$  の一定数の等高線が、 $y_{lab}$  と  $P_{lab}$  に対してプロットされている Fig. 13 からわかるように、この潜在的な困難を妨げている。30インチ泡箱で、十分よく測定される  $P_{lab}$  の低い値がなければ、一定の  $\eta_{lab}$  に対する  $y_{lab}$  の値に対して無感覚なので、未熟な運動量の決定さえ、非常に高い正確さで、 $\eta_{lab}$  から  $y_{lab}$  を計算するのに十分である。 $(\eta_{lab} = 3.5$  と  $P_{lab} = 5$  GeV/c に対する代表的な数値例として、5%の運動量の決定は、 $y$  の 0.01 よりも良い決定に対して十分である)。

Fig. 14 は、30インチ泡箱における高運動量の飛跡に対して取ることのできる、運動量分解能の図解である。このグラフに描写されているのは、102 GeV/c のビームの飛跡の例に対する、



RESOLUTION ESTIMATION USING SAGITTA

$$S(\mu) \approx \frac{3}{8} \frac{BL^2}{P} \quad (\text{kG-cm}^2/\text{GeV/c})$$

$$\Rightarrow \frac{\delta P}{P} \approx \frac{8}{3} \frac{P \delta S}{BL^2}$$

Fig. 14. Distribution of curvatures for measured beam tracks at 102 GeV/c.

測定された  $k \approx \frac{1}{P}$  の分布である。(30cm の長さのカット・オフは、この実験において採用された、基準の体積によって、2次飛跡に近似的に課せられた極限に対応する)。比較の目的のために、矢じりによる  $\frac{\delta P}{P}$  の一次の推測は又、Fig. 14 に要約されている；( $\delta S = 50\mu$ ,  $B = 27\text{kG}$ ,  $L = 45\text{cm}$  に対して、我々は  $\frac{\delta P}{P} = 0.25$  を得るが、これは近似的に実験的  $k$  の幅である)。高運動量の飛跡に対して、 $\frac{\delta P}{P} \propto P$  なので、典型的な2次飛跡に対する分解能はこれよりよく、 $y_{\text{lab}}$  の正確な決定に全く、あきらかに適切である。

我々は、次のように分解能の議論をまとめることが出来る：Fig. 13 に示された曲線の傾斜は、 $\left. \frac{\partial y}{\partial P} \right|_{\pi} = \frac{PL/P}{E} \left( \frac{m}{\mu} \right)^2$  という公式によって与えられる：高運動量で、これは  $\frac{1}{P^3}$  のように変化する；結果的に、高運動量の飛跡に対する  $P$  への  $\delta y$  のかけねのない依存性は、 $\frac{1}{P}$  のように減少する(もし角度の誤差が無視されるならば)。我々はそれゆえ、30インチの泡箱を用いてなす分解能は、完全に  $\pi$  中間子の速度測定に適當であると結論する；人が又、この泡箱のすぐれた認識能力パターンを考慮に入れ、そしてその低運動量飛跡に対するよい分解能を考慮に入れるときに、この方法が、事実  $\pi$  中間子の速度の測定に対して、ほとんど理想的に適していることがわかる！

Fig. 15 は、102 GeV/c での PP 衝突において、正と負両方の  $\pi$  中間子が生成される一組みの速度分布を示している。(組みにする前は、これら分布のそれぞれは、統計学の範囲内で対称で

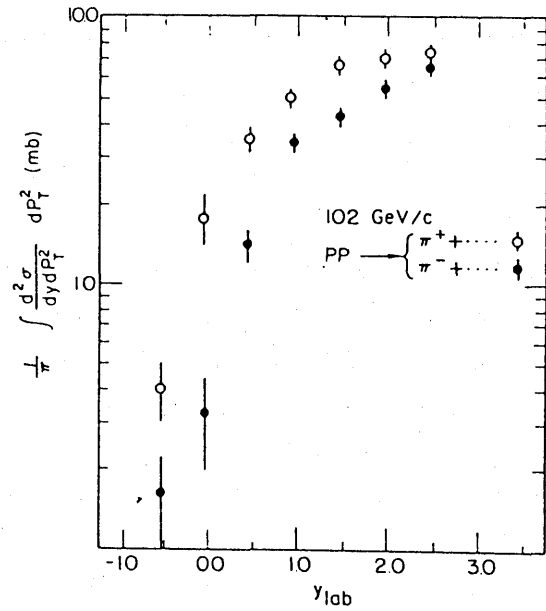


Fig. 15. Laboratory rapidity distributions for positive and negative pions at 102 GeV/c.

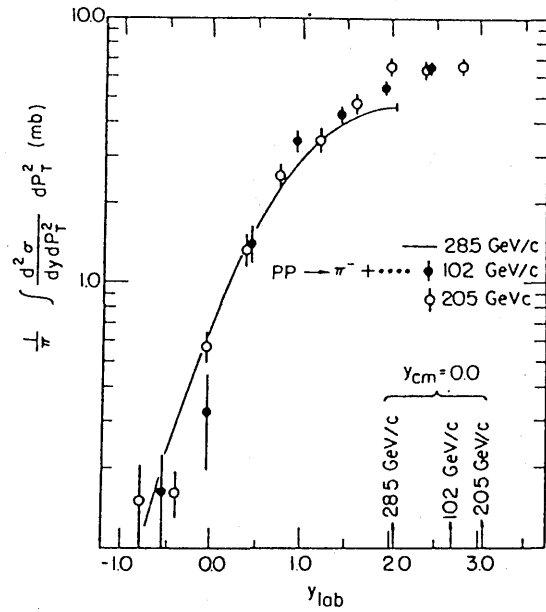


Fig. 16. Laboratory rapidity distributions for negative pions at 28.5, 102, and 205 GeV/c.

あった)。示された分布は、 $P^+$  と  $K^+$  のバックグラウンドに対して修正されている； ころら修正は、次のようにしてなされる。低運動量陽子は、イオン化によって、それと認識される（この講演の始めの部分で議論されたように）。これら飛跡は、標本から除外された（すなわち、それらは Fig. 15 に含まれていない）； すべての他の飛跡は  $\pi$  中間子であると仮定された。陽子と認められた標本の飛跡と、すべての分布の対称性の要求を用いて、近似的な規格化された、陽子の速度分布が決定された。陽子はこの分布に従って生成され、 $\pi$  中間子であるとまちがって解釈されたものは、 $\pi^+$  の分布から消去され、Fig. 15 に示されている。これは、そのような、適用された最大の修正であった（ $\leq 10\%$ ）。より小さい  $\bar{P}$  と  $K^+$  の修正は、これら粒子に対するガウス速度分布が仮定されていることを除いて、同様に決定された； これら速度分布に対する規格化は、102 GeV/c での  $K^0$ ,  $\Lambda^0$ ,  $\bar{\Lambda}^0$  に対する観察された断面積をもとにして推測される。Fig. 15 の点に付けられている誤差の棒線は、これら補正のすべての、我々の推定の不確かさを含む。このグラフにおいて、正の  $\pi$  中間子の負の  $\pi$  中間子に対する超過分は、基本的には PP 衝突における中性子の生成の統計の反映である。

Fig. 16 は、28.5, 102, 205 GeV/c での  $PP \rightarrow \pi^- + \dots$  反応に対する単一粒子包含速度スペクトルを比較したものである。（ $PP \rightarrow \pi^+ + \dots$  反応に対する、他のエネルギーでの対応するデータは入手出来なかった）。これらエネルギーのそれぞれで、又統計学の範囲内で、実験室系でプロットされたデータは、標的の微細化領域ではかってみられる。205 GeV/c でのデータは  $y_{cm} = 0$  の近傍で可能な高台に対する証拠を示しているが、しかし示された誤差の棒線は、現在包含されるべき、ガウスの壁を許容していない。

reference

(i) National Accelerator Laboratory

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad \frac{E+P_L}{E-P_L} &= \frac{\sqrt{P^2+m^2}+P_L}{\sqrt{P^2+m^2}-P_L} = \frac{\sqrt{P_L^2+P_T^2+m^2}+P_L}{\sqrt{P_L^2+P_T^2+m^2}-P_L} \\
 &= \frac{\sqrt{\left(\frac{P_T}{P_L}\right)^2 + \left(\frac{m}{P_L}\right)^2 + 1} + 1}{\sqrt{\left(\frac{P_T}{P_L}\right)^2 + \left(\frac{m}{P_L}\right)^2 + 1} - 1} = \frac{\left(\frac{P_T}{P_L}\right)^2 + \left(\frac{m}{P_L}\right)^2 + 1 + 2\sqrt{\left(\frac{P_T}{P_L}\right)^2 + \left(\frac{m}{P_L}\right)^2 + 1}}{\left(\frac{P_T}{P_L}\right)^2 + \left(\frac{m}{P_L}\right)^2 + 1 - 1} \\
 &= \frac{\left(\frac{\mu}{P_L}\right)^2 + 1 + 2\sqrt{\left(\frac{\mu}{P_L}\right)^2 + 1} + 1}{\left(\frac{\mu}{P_L}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\mu}{P_L}\right)^2 + 2 + 2\sqrt{\left(\frac{\mu}{P_L}\right)^2 + 1}}{\left(\frac{\mu}{P_L}\right)^2} \\
 &= \frac{\tan^2 \phi + 2 + 2\sqrt{\tan^2 \phi + 1}}{\tan^2 \phi} = \frac{\sec^2 \phi + 1 + 2 \sec \phi}{\sec^2 \phi - 1} \\
 &= \frac{(\sec \phi + 1)^2}{(\sec \phi + 1)(\sec \phi - 1)} = \frac{1 + \cos \phi}{1 - \cos \phi} = \frac{2 \cos^2 \frac{\phi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{1}{\tan^2 \frac{\phi}{2}}
 \end{aligned}$$



参考文献

P. Slattery "Proton-Proton Collisions at 102GeV/c" AIP Conference Proceedings No. 12 "Experiments on High Energy Particle Collisions-1973" Editor Robert S. Panvini

(原稿受理 1995年11月27日)