

高等学校物理基礎と物理における 重力による運動の有効な指導法

—初速度の向きに基づく運動の分類—

Useful Teaching Method of Motions under Gravity
in Japanese High School Basic and Advanced Physics
—Classifying Motions with Direction of Initial Velocity—

中川 徹夫

NAKAGAWA Tetsuo

神戸女学院大学 人間科学部 環境・バイオサイエンス学科 教授
Department of Biosphere Sciences, School of Human Sciences, Kobe College
nakagawa@mail.kobe-c.ac.jp

要旨

高等学校物理基礎や物理の落体の運動の単元では、直線運動である自由落下、鉛直投射（鉛直上方投射、鉛直下方投射）、平面運動である水平投射および斜方投射が取り扱われている。これらはいずれも重力による運動であるにもかかわらず、履修者の中には、それぞれを別個の運動と捉え、各運動の変位や速度を算出する式をすべて“公式”として機械的に暗記する者も少なくない。このような問題を回避するため、本論考では、重力による物体の運動を、初速度の向きに着目して2次元の平面運動と1次元の直線運動に分類した。平面運動に関しては、個々の運動に相当する変位と速度の算出式および軌道方程式、直線運動に関しては、変位と速度の算出式の誘導過程を提示した。今回提示した誘導過程においては、高度な数学は使用しておらず、高校生や物理学を専門としない初年次大学生にも追試可能である。これより、重力による運動を理解するうえで、有用であると思われる。

キーワード：高等学校物理、物理基礎、物理、重力、初速度

Key words: high school physics, basic physics, advanced physics, gravity, initial velocity

1 はじめに

現行の高等学校学習指導要領によれば、理科の科目である物理基礎で、重力による直線運動である自由落下および鉛直投射（鉛直投げ上げ、鉛直投げ下ろし）¹⁾を、物理で、重力による平面運動である水平投射および斜方投射²⁾について扱うこととされている。これらの運動は、高等学校物理基礎^{3,4)}や物理^{5,6)}、さらに大学初年次の物理学^{7,8)}の教科書に登場する。これより、履修者は物理基礎の授業で履修した内容を、再度物理や大学初年次の授業で復習することになる。

高等学校物理基礎や物理、あるいは大学初年次の物理学の教科書には、重力による運動に関して、自由落下、鉛直投射（鉛直投げ上げ、鉛直投げ下ろし）、水平投射、斜方投射の順に記載されている。履修者は、教科書に記載されている順番に学習する。その際、直線運動と平面運動の差異はあるものの、個々の運動をいずれも重力による運動と捉え、相互の関係を理解することが重要である。しかし、履修者の中には、個々の運動を独立した別個の運動と捉え、各運動の変位や速度を算出する式をすべて“公式”として暗記し、機械的に練習問題を解こうとする者も少なくない。かつて、著者の担当する物理学概論の授業の履修者の中に、斜方投射の軌道方程式を、「ワイイコールタンジェントシータ掛けるエックスマイナス2ブイ0二乗コサイン二乗シータぶんのジーエックス二乗」と呪文のように唱えながら、何度も

$$y = (\tan\theta)x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$$

をノートに書き留めていた学生がいた。この式は、 x 変位の時間 t 関数式と y 変位の t 関数式から、 t の消去により容易に誘導できる。そこで、授業時に両者から誘導するように指示した。しかし、決して暗記せよとは言わなかった。この軌道方程式は何時でも短時間に容易に誘導できるので、著者は未だにこの式を“暗記”していない。

物理学には限らず、自然科学関係の科目を学ぶ際に覚えるべき数式は最小限に止め、これらをもとに、他の数式を誘導できる力を定着させることである。高等学校で履修する物理基礎や物理に関しては、初歩的な三角関数と等加速度直線運動の変位（速度は時間で微分すれば求まるので暗記不要！）と微分・積分の知識があれば、ほとんどすべての式を短時間で容易に誘導できる。種々の数式をすべて“公式”として暗記し、これに数値を入れて問題を解答する場合、例えば y 軸の正（プラス）の方向を鉛直上向きから鉛直下向きに変更しただけでも、混乱をきたすであろう。数式を暗記するだけでは、物理学を学んだことにはならない。数式の物理学的な意味を考察することが重要である。著者はこのことを常時注意喚起している。しかし、遺憾ながら、未だに数式の意味を“理解”せずに“暗記”しようとする者が後を断たない。実際問題として、数式を暗記しただけでは、問題を解答する際に使いこなすことができず、結果的には成績に結びつかないことが多い。

このような問題を回避するため、本論考では、生徒や学生が、重力による物体の運動を学習する際、理解を支援する教材の開発を試みた。具体的には、物体の初速度の向きに着

目して, 2次元の平面運動と1次元の直線運動に分類し, それぞれの運動に関して, 履修者が個々の運動に相当する数式を納得しながら理解できるよう, 詳細な誘導過程を提示した. これまでに重力による運動を初速度の向きによって分類した前例は見当たらず, 独創的な試みである.

2 重力による運動の初速度の向きによる分類

2-1 重力による運動の分類

水平右向きが正の x 軸と, 鉛直上向きが正の y 軸を設定する. 原点から物体 (質点) を, 初速度 v_0 で投射する. v_0 と x 軸のなす角を θ ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) とし, 空気抵抗は無視する. いずれの場合も重力が働くため加速度運動をする. その際, 図1に示すように, 初速度 v_0 の向きにより, 物体の運動を A から E までの5つのパターンに分類できる.

A は, $\theta = \pi/2$, つまり物体を y 軸にそって鉛直上方に投射する運動である. 高等学校物理基礎^{3,4)}や物理^{5,6)}では, 鉛直投げ上げと呼ばれているもので, ここでは, 鉛直上方投射と呼ぶ.

B は, $0 < \theta < \pi/2$, つまり物体を x 軸に対して右斜め上方に投射する運動である. 高等学校物理基礎^{3,4)}や物理^{5,6)}, 大学初年次の物理学^{7,8)}では, 斜方投射と呼ばれている. ここでは, D のような運動と区別するため, 斜上方投射と呼ぶ.

C は, $\theta = 0$, つまり物体を x 軸にそって水平右方向に投射する運動である. 高等学校物理基礎^{3,4)}や物理^{5,6)}, 大学初年次の物理学^{7,8)}では, 水平投射と呼ばれており, ここでもこれに従う.

D は, $-\pi/2 < \theta < 0$, つまり物体を x 軸に対して右斜め下方に投射する運動である. 高等学校物理基礎や物理には, 登場しない. ここでは, B の斜上方投射と区別するために, 斜下方投射と呼ぶ.

E は, $\theta = -\pi/2$, つまり物体を y 軸にそって鉛直下方に投射する運動である. 高等学校物理基礎^{3,4)}や物理^{5,6)}では, 鉛直投げ下ろしと呼ばれている. ここでは, 鉛直下方投射と呼ぶ. 自由落下は, $v_0 = 0$ の場合である.

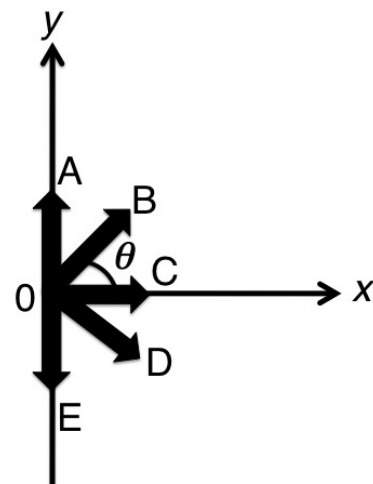


図1 初速度の向きによる重力による運動の分類

A: 鉛直上方投射, B: 斜上方投射, C: 水平投射, D: 斜下方投射, E: 鉛直下方投射 (または自由落下).

2-2 重力による2次元の平面運動

2-2-1 変位, 速度と軌道方程式

初速度 v_0 の x 軸方向の成分 (x 成分) は, 題意により $v_0 \cos \theta$ である. x 軸方向には, 物体

に対して力が働かないので加速度は0であり, 初速度 $v_0 \cos \theta$ の等速直線運動をする. よって, 時刻 t における変位 x および速度 v_x は,

$$x = (v_0 \cos \theta)t \quad (1)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \theta \quad (2)$$

となる. 高等学校物理基礎や物理では, 通常式(1)と(2)は独立した式として登場するが, 速度は変位の時間微分であるので, 式(1)のみ理解しておけば十分である.

初速度の大きさ v_0 の y 軸方向の成分 (y 成分) は, 題意により $v_0 \sin \theta$ である. y 軸方向には, 物体に対して重力が働き, 重力加速度 g の等加速直線運動をする. よって, 時刻 t における変位 y および速度 v_y は,

$$y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \theta - gt \quad (4)$$

となる. この場合も先ほど同様の理由で, 式(3)のみ理解しておけばよい. 式(1)と(3)より t を消去すれば, 軌道方程式

$$y = (\tan \theta)x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (5)$$

が得られる. 以上, 式(1)–(5)が, 重力による2次元の平面運動の一般式である.

2-2-2 斜上方投射

斜上方投射 (図1のBに相当) の θ の範囲は, $0 < \theta < \pi/2$ である. この場合, 式(1)–(5)をすべて満足する.

2-2-3 水平投射

水平投射 (図1のCに相当) は $\theta = 0$ だから, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. よって, 式(1)および(2)は, それぞれ,

$$x = v_0 t \quad (6)$$

$$v_x = v_0 \quad (7)$$

となる. すなわち, 初速度 v_0 の等速直線運動をする. また, 式(3)および(4)は, それぞれ,

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (8)$$

$$v_y = -gt \quad (9)$$

となる. 式(4)と(9)を比較すると, 斜下方投射の鉛直方向の運動は, 初速度0の鉛直下方投射, つまり自由落下であることがわかる.

水平投射の y 軸は, 最初に物体が動き出す方向に注目して, 鉛直下向きを正とすることが多い. そこで, 鉛直下向きを正とする Y 軸を定義する. その場合の変位 Y および速度 v_y

は, $Y=-y$ および $v_Y=-v_y$ より, 式(8)および(9)は,

$$Y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (10)$$

$$v_Y = gt \quad (11)$$

となる. 式(6)および(10)より t を消去すれば, 軌道方程式

$$Y = \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad (12)$$

が得られる. あるいは, 式(5)で $\theta=0$ とし, $Y=-y$ としてもよい.

2-2-4 斜下方投射

斜下方投射 (図1のDに相当) の場合の θ の範囲は, $-\pi/2 < \theta < 0$ である. この場合, 式(1)-(5)をすべて満足する.

水平投射の場合と同様に, 鉛直下向きを正とする Y 軸を定義すれば, 式(3)および(4)で, 変位 Y および速度 v_Y は, $Y=-y$ および $v_Y=-v_y$ より, それぞれ,

$$Y = -(v_0 \sin \theta)t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (13)$$

$$v_Y = -v_0 \sin \theta + gt \quad (14)$$

となる.

2-3 重力による1次元の平面運動

2-3-1 水平方向の変位と速度

重力による1次元の運動である鉛直上方投射 (図1のAに相当) は, $\theta=\pi/2$ である. また, 鉛直下方投射 (図1のEに相当) は, $\theta=-\pi/2$ である. いずれにせよ, $\cos \pi/2 = \cos(-\pi/2) = 0$ だから, 式(1)および(2)は, それぞれ,

$$x = 0 \quad (15)$$

$$v_x = 0 \quad (16)$$

となる. つまり, 物体は x 軸方向には運動せず, y 軸方向の運動のみを考慮すればよい.

2-3-2 鉛直上方投射

鉛直上方投射 (図1のAに相当) は, $\theta=\pi/2$ である. $\sin \pi/2 = 1$ だから, 式(3)および(4)は, それぞれ,

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (17)$$

$$v_y = v_0 - gt \quad (18)$$

となる. 式(3)および(4)で, $0 < \theta < \pi/2$ の場合は斜上方投射となる. 式(4)と(18)を比較すると, 斜上方投射の鉛直方向の運動は, 初速度 $v_0 \sin \theta$ の鉛直上方投射であることがわかる.

2-3-4 鉛直下方投射

鉛直下方投射 (図1のEに相当) は, $\theta = -\pi/2$ である. $\sin(-\pi/2) = -1$ だから, 式(3)および(4)は, それぞれ,

$$y = -v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (19)$$

$$v_y = -v_0 - gt \quad (20)$$

となる. 水平投射および斜下方投射の場合と同様に, 鉛直下向きを正とする Y 軸を定義すれば, 式(19)および(20)で, 変位 Y および速度 v_Y は, $Y = -y$ および $v_Y = -v_y$ より, それぞれ,

$$Y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (21)$$

$$v_Y = v_0 + gt \quad (22)$$

となる. 式(3)および(4)で, $-\pi/2 < \theta < 0$ の場合は斜下方投射となる. 式(14)と(22)を比較すると, 斜下方投射の鉛直方向の運動は, 初速度 $v_0 \sin \theta$ の鉛直下方投射であることがわかる.

2-3-5 自由落下

鉛直下方投射のうち, $v_0 = 0$ の場合が自由落下である. このとき, 式(19)および(20)はそれぞれ,

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (23)$$

$$v_y = -gt \quad (24)$$

となり, 式(21)および(23)はそれぞれ,

$$Y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (25)$$

$$v_Y = gt \quad (26)$$

となる. これは, 水平投射の式(8)–(11)と同じである. つまり, 水平投射の鉛直方向の運動は自由落下である.

3 重力による運動の具体例

2 節では重力による運動を初速度の向きにより分類し, 重力による 2 次元の平面運動の変位と速度の時間関数式, 軌道方程式, 重力による 1 次元の直線運動の変位と速度を誘導した. これらの結果に基づき, それぞれの運動について, 具体例に基づき検討したい. 物体 (質量) を初速度 v_0 を $49 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ で投射した場合の重力による運動の軌道を, 図2に示す. 軌道の描写には, Hulincks 社製のソフトウェア KaleidaGraph 4.0 (Macintosh 版) を使用した.

A–C は, それぞれ θ を $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ で斜上方投射した場合の軌道を示す. θ が大きくなるにつれて物体は最も高く上昇し, v_0 の y 成分の大きさ $v_0 \sin \theta$ の相違を反映している. ま

た, 地面から $\theta = \pi/4$ で投射すれば, 最も遠方へ到達することが分かる.

Dは, θ を $\pi/2$ で鉛直上方投射した場合の軌道を示す. 最高点はおよそ120mに達し, 斜上方投射の場合よりも上昇する. これは, $v_0 > v_0 \sin \theta$ に起因する.

Eは, θ を0で水平投射した場合の軌道を示す. 図からも明らかなように, $v_0 \sin \theta$ が0であるので最高点は出現しない.

F-Hは, それぞれ θ を $-\pi/6$, $-\pi/4$, $-\pi/3$ で斜下方投射した場合の軌道を示す. θ が小さくなるにつれて ($|\theta|$ が大きくなるにつれて) 物体は速く落下し, v_0 のy成分の大きさ $|v_0 \sin \theta|$ の相違を反映している.

Iは, θ を $-\pi/2$ で鉛直下方投射した場合の軌道を示す. $|v_0| > |v_0 \sin \theta|$ のため, 斜下方投射の場合よりも早く落下する.

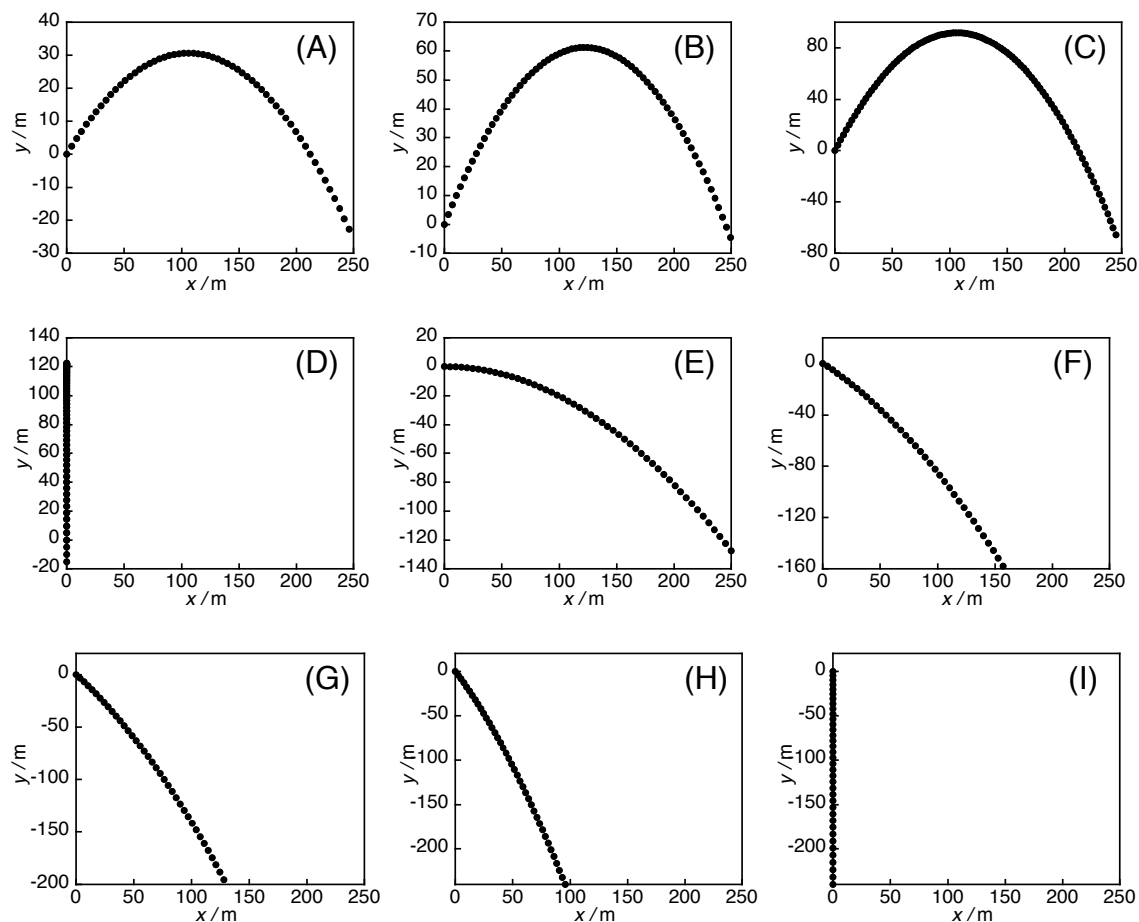


図2 落体の運動の軌道 (空気抵抗を無視, x 軸を水平方向に取り右向きを正, y 軸を鉛直方向に取り下向きを正とした. $v_0 = 49 \text{ m/s}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ して算出した)

(A) $\theta = \pi/6$, (B) $\theta = \pi/4$, (C) $\theta = \pi/3$, (D) $\theta = \pi/2$, (E) $\theta = 0$, (F) $\theta = -\pi/6$, (G) $\theta = -\pi/4$, (H) $\theta = -\pi/3$, (I) $\theta = -\pi/2$

4 おわりに

重力による物体の運動を, 初速度の向きに着目して分類した. 2次元の平面運動に関しては, 個々の運動に相当する変位と速度および軌道方程式, 1次元の平面運動に関しては, 変位と速度の誘導過程を提示した.

これらの誘導過程においては, 大学の専門課程で履修するような高度な数学は使用していない. したがって, 高校生や物理学を専門としない初年次大学生にも追試が可能であり, 重力による運動を理解するうえで, 有用である. また, KaleidaGraphのようなソフトウェアを用いて, 重力による運動の軌道を描くことで, 運動の様子を視覚的に捉えることができる. 今後, 高等学校や大学の授業における活用が期待される.

文献

- 1) 文部科学省, 「高等学校学習指導要領解説 理科編 理数編」, 実教出版, pp.27-29, 2009年.
- 2) 文献 1, p.37.
- 3) 田村剛三郎 他, 「改訂 高等学校 物理基礎」, 183・第一・物基 320, 第一学習社, pp.26-35, 2017年.
- 4) 國友正和 他, 「改訂版 物理基礎」, 104・数研・物基 318, 数研出版, pp.29-38, 2017年.
- 5) 中村英二 他, 「高等学校 物理」, 183・第一・物理 305, 第一学習社, pp.13-19, 2013年.
- 6) 國友正和 他, 「物理」, 104・数研・物理 304, 数研出版, pp.14-23, 2013年.
- 7) 金原 粲 編著, 「これだけはおさえたい物理」, Primary 大学テキスト, 実教出版, pp.62-70, 2009年.
- 8) 澤田 肇, 「<<基礎固め>> 物理」, <<基礎固め>>シリーズ, 化学同人, pp.45-51, 2002年.