力学と場の理論に現われる汎函数微分

宮 本 道 子

§1 ハミルトンの原理

力によって物体がどのような法則にもとづいて運動するかという疑問を解決することは，ニュートンの昔から私達がいだいてきた問題である。もし質量が一定ならば，力を$\boldsymbol{F}$，物質の質量をm，その速度の変化する割合を$\boldsymbol{a}$とすれば，$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ となることを，ニュートンは運動の基本法則として論じた。この原理にもとづいて，物体の落下する加速度gが 980cm/sec^2 であることが観測され，落下距離xと時間tの関係 $x=\frac{1}{2}gt^2$ も，実験的に導かれた。このような経験的に求められた関係をもうすこし定式化して，理論的に表現しようとするのが，現代物理学のひとつのこころみである。そこで，ある物体の運動を記述するときに，その大きさを無視して，一点の運動として記述するとき，これを質点又は粒子と呼ぶことにする。この質点の位置を示すベクトルを$\boldsymbol{r}$で表わし，その速度を$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$で表わす。又，加速度を$\boldsymbol{a}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$で示す。質点が一個であれば，この記号で十分であるが，一般に数個の質点からなる系の位置を一意的に決めるのに必要な独立な量を自由度と呼び，この数をSで表わすことにすると，その系の一般座表は，q_1，q_2……，q_s で表わされ，一般速度は，時間微分をドットをつけて書けば，$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$……，$\dot{q}_s$ で表わすことが出来る。数個の質点からなる力学系は，時間と，一般座表，一般速度を独立変数とする函数 $L(q_1,\ q_2\cdots\cdots,\ q_s,\ \dot{q}_s,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2\cdots\cdots,\ \dot{q}_s,\ t)$ によって特徴づけられる。この函数をその系のラグランジアンと呼ぶ。

時刻 $t=t_1$ に系が $q^{(1)}$，時刻 $t=t_2$ に $q^{(2)}$ で示される位置に質点があるとすれば，$q^{(1)}$ から $q^{(2)}$ へ運動するのに，図1で示すようにいろんな道筋があるが，

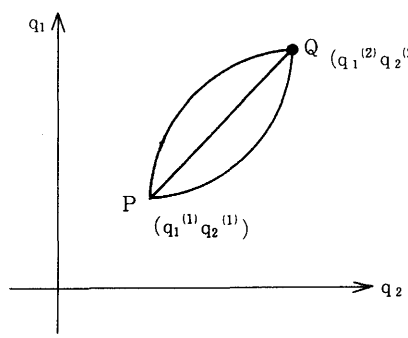

図1

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\ \dot{q},\ t)\ dt \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1.1)$$

が最小値をとるような道筋をとって，運動する。このことを，ハミルトンの原理，又は最小作用の原理と呼ぶ。ここで，q で q_1，$q_2\cdots\cdots$，q_s を，$\dot{q}$ で $\dot{q}_1$，$\dot{q}_2\cdots\cdots$，$\dot{q}_s$ を表わした。

§2　オイラー・ラグランジの方程式

理論をすすめるために，簡単に

$$F(y,\ \frac{dy}{dx},\ x)$$

という関数を考える。そしてこの積分を

$$I=\int_a^b F(y,\ \frac{dy}{dx},\ x)dx=I[y(x)] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

と定義する。この積分を汎函数と呼ぶ。ここで，

$$y(a)=a\ ,\qquad y(b)=b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

であるものとする。(2.2) の条件の下に (2.1) を最小にする函数があったとして，これを

$$y=\overline{y}(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

とする。一方，

$$\eta(a)=0\ ,\qquad \eta(b)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.4)$$

となる関数 $\eta(x)$ と任意の実数 α をとって，

$$y_\alpha(x)=\overline{y}(x)+\alpha\eta(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.5)$$

とおけば，この $y_\alpha(x)$ は(2.2)をみたすから，今まで述べてきた汎函数の定義と矛盾しない。$I[y_\alpha(x)]$ は α の函数となるが，(2.3) の仮定によって，この函数は $\alpha=0$ のときに最小値をとるはずである。そこで，

$$I(\alpha)=\int_a^b F(\overline{y}+\alpha\eta,\ \overline{y}'+\alpha\eta',\ x)dx$$

$$=I(0)+\alpha\int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta')\,dx+0(\alpha^2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.6)$$

とすると，

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx+\alpha\,(0(\alpha)) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.7)$$

となる，$\alpha=0$ とすると，(2.7) の第2項はゼロとなるから，

$$\left.\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.8)$$

となる。

(2.8)式を部分積分すると，

$$0=\eta\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_a^b+\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\ \frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\ dx \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.9)$$

(2.4) の条件によって，第一項がゼロになる。故に第二項の積分がゼロになるために，被積分関数がゼロとなり，

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\ \frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

とならなければならない。一般に $\overline{y}(x)$ のことを $y(x)$ と書きなおして，

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.10)$$

と書く。この (2.10) 式の関数を $\dfrac{\delta F}{\delta y}$ と定義し，汎函数微分と呼ぶ。又，(2.10) の方程式のことをオイラー・ラグランジの方程式と呼ぶ。又，(2.10)式を $\dfrac{\delta I}{\delta y}$ と定義することもある。(1.1) の作用を表わすラグランジアンの時間についての積分に対して，オイラー・ラグランジの方程式を求めてみると，

$$\frac{\delta L}{\delta q_j}=\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=0$$

となる。

ここでよく知られた力学の問題にこのハミルトンの原理を適用して解いてみよう。(図2)

原点 $A(0,\ 0)$ で静止していた質点が $B(x_0,\ y_0)$ まで滑らかな固定した曲線に沿って，重力の作用だけで，最小の時間ですべり落ちるには，どんな道筋を通ればよいかという問題である。運動エネルギーは，ポテンシャルエネルギーに等しいということによって，$\dfrac{1}{2}mv^2=mgy$ そして $v=\sqrt{2gy}$ となることが，わかる。又，曲線の微小弧

$$\begin{aligned} ds&=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\\ &=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \end{aligned}$$

を走るに要する時間は距離を速さで割ればよいから，

$$dt=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx$$

となる。ここで，簡単のために，$2g=1$ と考えると，全体の時間は，

$$t=\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx$$

となる。ここで $F=\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{y}}$ であるから，(2.10)式に代入して計算するのであるが，まず計算しやすいように (2.10) 式を変形する。(2.10) 式の両辺に y' を乗ずると，

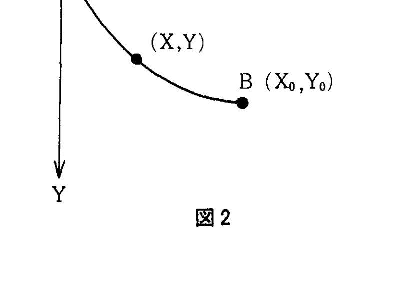

図2

$$y'\frac{\partial F}{\partial y}-y'\frac{d}{dx}\ \frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

$$y'-y'\frac{d}{dx}\ \frac{\partial F}{\partial y'}+y''\frac{\partial F}{\partial y'}-y''\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{d}{dx}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

故に　$F-y'\dfrac{\partial F}{\partial y'}=\text{constant}$　…………(2.11)

(2.11) 式に　$F=\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{y}}$　を代入すると，

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\ \frac{1}{\sqrt{y}}$$

故に，　$\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{y}}-\dfrac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}=C'$　　$\dfrac{1}{C'^2}=C$

$C=y\,(1+y'^2)$　…………(2.12)

簡単のために，$y'=\cot\theta$　という変換をすると，$y=A(1-\cos\phi)$　$x=A\,(\phi-\sin\phi)$　(2.13)

ここで　$2\theta=\phi$，$C=2A$　である。

(2.13) はよく知られているように，サイクロイドを表わす。

§ 3　四次元空間

ある事象はそれが起った空間と時間の座表　x，y，z，t　によって記述される。このセクションでは，この四次元空間について，考えてみたい。

一定の速さで運動している基準系 K と K' を考える。x 軸と x' 軸が一致して，y 軸と z 軸はそれぞれ y' 軸と z' 軸に平行なように座表軸を選ぶ（図３）。又，それぞれの時間軸を t と t' とする。A という事象の座表を，$A\,(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ とし，Bという事象の座表を $B(\mathrm{ict},\ x,\ y,\ z)$ とすると，世界間隔の２乗を，

$S_{AB}{}^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2$　…………(3.1)

と定義することが出来る。簡単のために，x軸とt軸による平面を考えると，二つの直線は，

$$x=\pm ct$$

である（図４）。そしてこの直線上では，

$$c^2t^2-x^2=0$$

となる。さらに四次元空間での円錐を考えると，図４における　$x=\pm ct$　という直線は，円

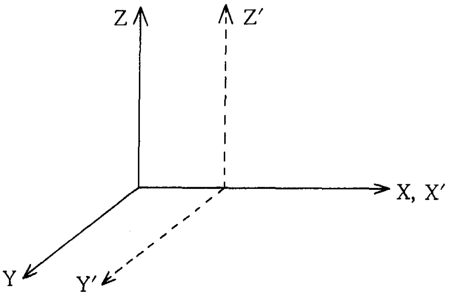

図３

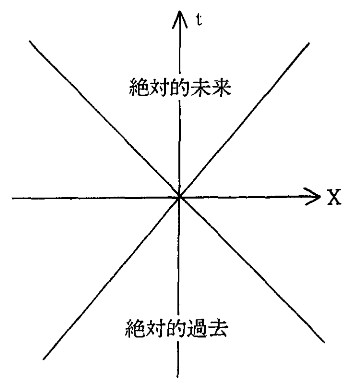

図４

錐 “light cone” となる。そしてこの円錐上では，

$$S_{AB}{}^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.2)$$

である。

図3において， K' 系は K 系に対して速さ V で動いていて，この速さが $V \ll C$ のときには，K 系の座表と K' 系の座表の間には，ガリレイ変換が成立して， $x=x'+vt'$，$y=y'$，$z=z'$，$t=t'$ である。故に K' 系での世界間隔の2乗は，

$$S^2{}_{AB-K'系} = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.3)$$

K 系での世界間隔の2乗は，

$$S^2{}_{AB-K系} = c^2t'^2 - (x'+vt')^2 - y'^2 - z'^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.4)$$

であり， $S^2{}_{AB-K系} \neq S^2{}_{AB-K'系}$ はあきらかである。

しかし， $V \approx C$ すなわち，相対論的な速さで，K' 系が K 系に対して動いている場合には，K 系の座表と K' 系の座表の間にローレンツ変換が成立して， $x = \dfrac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，$y=y'$，

$z=z'$ $t = \dfrac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ である。故に，K' 系では，

$$S^2{}_{AB-K'系} = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

であり，K 系では

$$S^2{}_{AB-K系} = \frac{c^2\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{(x'+vt')^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - y'^2 - z'^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

となって， $S^2{}_{AB-K系} = S^2{}_{AB-K'系}$ である。このように，ローレンツ変換によって，いかなる系においても，世界間隔は不変であることがわかる。このようにローレンツ不変性すなわち Lorentz invariant は今このセクションであつかっているミンコフスキー空間（Minkowski space）の特質である。

ct，x，y，z と同じように変換される四つの成分を持つベクトルを，四元ベクトルと呼ぶ。それらを A^0，A^1，A^2，A^3 と書くことにすると，

$$A^0 = \frac{A^{0'}+\frac{v}{c}A^{1'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad A^1 = \frac{A^{1'}+\frac{v}{c}A^{0'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad A^2 = A^{2'} \quad A^3 = A^{3'} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.5)$$

と書ける。四元ベクトルの大きさの2乗は，

$$A^2 = A^{02} - A^{12} - A^{22} - A^{32} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.6)$$

となり，四元ベクトルの四つの成分が2種類あるものとして，一方を上にサフィックスのある A^i，一方を下にサフィクスのある A_i とすると，A^i は反変成分と呼ばれ，A_i は共変成分と呼ばれる。これらの成分の間に次の関係がある。

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.7)$$

四元ベクトルの2乗は，次のように定義され，又 (3.7) より

$$\sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = A^{02} - A^{12} - A^{22} - A^{32} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.8)$$

となる。

四元２階テンソルの成分は，反変形 A^{ik}，共変形 A_{ik} 及び混合形 $A^i{}_k$ という３つの形に分類することが出来る。サフィックスの上と下の関係は次のようである。

$$A_{00}=A^{00},\quad A_{01}=-A^{01},\quad A_{11}=A^{11},\quad A^0{}_0=A^{00}$$
$$A_0{}^1=A^{01},\quad A^0{}_1=-A^{01},\quad A^1{}_1=-A^{11} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3.9)$$

すなわち時間の添字 (0) は符号を変えないが，空間の添字 (1，2，3) は符号を変える。

又，任意の四元ベクトル A^i に対して，

$$\delta^i{}_k\ A^k = A^i$$

が成立するような $\delta^i{}_k$ は単位テンソルと呼ばれ，この成分は次のようである。

$$\delta^i{}_k = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \qquad (\delta^i{}_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

同様に，次の g^{ik} によって，共変テンソル又は反変テンソルが，得られる。

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g_{ik}\ A^k = A_i, \qquad g^{ik} A_k = A^i$$

である。又，(3.8) のスカラー積は，

$$A^{02} - A^{12} - A^{22} - A^{32} = g_{ik}\ A^i\ A^k = g^{ik}\ A_i\ A_k$$

と書き表わせる。 $\delta^i{}_k$，g_{ik}，g^{ik} はそれらの成分が，どんな座表系でも同じであるという点で独特である。

§４　電磁場の中の粒子の運動

世界間隔の座表変換に対する不変性によって，

$ds^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = c^2(dt')^2$ となる場合について考える。変形すると，

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{c^2(dt)^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

故に，$dt' = \dfrac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$ という関係がある。ここで，いかなる外力の影響も受けない自由粒子に対する作用積分を考えてみると，この積分は相対論的に論ずれば，ローレンツ変換に対して不変でなければならない。この考えられる唯一のローレンツ不変なスカラーは，世界間隔 ds である。あるいは任意の定数倍である，αds である。故に自由粒子に対する作用は，

$$S = -\alpha \int_a^b ds \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.1)$$

この意味は，時刻 t_1 と t_2 に起る２つの事象 a と b の間の世界線にそってとった距離である。さきほど求めた関係式によって，(4.1) は，

$$S=-\alpha\int_a^b ds=-\int_{t_1}^{t_2}\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt$$

と書き直すことが出来る。従って，自由粒子のラグランジアンは， $L=-\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ である。又，簡単な計算によって，$\alpha=mc$ となることが知られている。m は自由粒子の質量である。

電磁場の中の粒子の運動に対する作用は，この自由粒子の項と，§3で述べた，四元ベクトルで書かれた粒子の電磁場との相互作用を記述する項， $-\frac{e}{c}\int_a^b A_i dx^i$ とからなっている。ここで，A_i は座表と時間の関数であるものとする。すなわち作用は，

$$S=\int_a^b(-mc\,ds-\frac{e}{c}A_i\,dx^i) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.2)$$

と考えられ，四元ベクトル A_i の3つの空間成分は場のベクトルポテンシャルと呼ばれる，3次元ベクトル $\boldsymbol{A}$ を作る。その時間成分は，場のスカラーポテンシャルであり，$A^0=\phi$ で表わすと， $A^i=(\phi,\ \boldsymbol{A})$ である。従って，(4.2) の作用積分は，次のように書き直すことが出来る，

$$S=\int_a^b(-mc\,ds+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{r}-e\phi\,dt)$$

粒子の速度 $\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ とすると，作用は，

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\boldsymbol{Av}-e\phi\right)dt$$

であり，この被積分関数はラグランジアンとなり

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\boldsymbol{Av}-e\phi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.3)$$

である。このラグランジアンは自由粒子のラグランジアンと $\frac{e}{c}\boldsymbol{A}-e\phi$ だけ異っているが，この項が電荷と場の相互作用を表わす。ここで，この作用積分の汎函数微分を求めると，

$$\frac{\delta S}{\delta \boldsymbol{r}}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=0$$

である。

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=\boldsymbol{P}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A} \qquad \left(\boldsymbol{P}=\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=\frac{e}{c}\mathbf{grad}(\boldsymbol{Av})-e\,\mathbf{grad}\,\phi$$

よく知られたベクトル解析の公式により

$$\mathbf{grad}(\boldsymbol{ab})=(\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=\frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}-e\,\mathbf{grad}\,\phi$$

$$\frac{\delta S}{\delta \boldsymbol{r}}=\frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}-e\,\mathbf{grad}\,\phi-\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{P}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)=0 \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.5)$$

(4.4) 式に (4.5) 式を代入して,

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=-\frac{e}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-e\,\mathbf{grad}\,\phi+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.6)$$

が得られる。(4.6) が電磁場の中の粒子の運動方程式である。左辺は運動量の時間微分であるから，右辺は粒子に働く力を表わしている。(4.6)の第1項と第2項より電場の強さを定義し,

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\mathbf{grad}\,\phi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.7)a$$

第3項より磁場の強さを

$$\boldsymbol{H}=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.7)b$$

と定義する。このようにして，ラグランジアンの汎函数微分を求めることによって，よく知られたローレンツの力

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=e\boldsymbol{E}+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}$$

が得られた。

この同じ電磁場の中の粒子の方程式を (4.2) 式から直接導びいてみよう。

$$\delta S=\delta\int_a^b\left(-mc\,ds-\frac{e}{c}A_i dx^i\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.8)$$

$ds=\sqrt{dx_i\,dx^i}$ で, $\delta(ds)=\dfrac{\partial(ds)}{\partial(dx_i)}\delta(dx^i)=\dfrac{\partial(ds)}{\partial(dx_i)}d(\delta x^i)$

なぜならば, $\delta\dot{q}=\dot{q}'-\dot{q}=\dfrac{d}{dt}\delta q$ 等となるからである。故に (4.8) 式は,

$$\delta S=-\int_a^b\left((mc\delta(ds)+\frac{e}{c}A_i\,d(\delta x^i)+\frac{e}{c}\delta A_i\,dx^i\right)$$

$$=-\int_a^b\left(mc\frac{dx_i\,d\delta x^i}{ds}+\frac{e}{c}A_i\,d\delta x^i+\frac{e}{c}\delta A_i\,dx^i\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.9)$$

である。はじめの2項を部分積分し, $\dfrac{dx_i}{ds}=u_i$ とすると，(4.9) 式は

$$\delta S=\left[-(mcu_i\delta x^i+\frac{e}{c}A_i\,\delta x^i)\right]_a^b$$

$$+\int_a^b(mcdu_i\delta x^i+\frac{e}{c}\delta x^i\,dA_i-\frac{e}{c}\delta A_i dx^i)=0 \quad \cdots\cdots(4.10)$$

第1項はゼロである。さらに, $\delta A_i=\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k$, $dA_i=\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^k$ である故に(4.10)式は,

$$\delta S=\int_a^b(mcdu_i\delta x^i+\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^i\,dx^k-\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^i\delta x^k)=0$$

ここで, $du_i=\dfrac{du_i}{ds}ds$ $dx^i=u^i ds$ として，第3項のサフィックス k と i を入れかえると,

$$\delta S=\int_a^b\left[mc\frac{du_i}{ds}-\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k\right]\delta x^i\,ds=0$$

であり, δx^i が任意であることから，被積分函数がゼロでなければならない。すなわち,

$$mc\frac{du_i}{ds}-\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4.11)$$

ここで，$F_{ik}=\dfrac{\partial A_k}{\partial x^i}-\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}$ とするとき，この反対称テンソルは電磁場テンソルと呼ばれる。

故に $mc\dfrac{du^i}{ds}=\dfrac{e}{c}F^{ik}u_k$ と書けて，これは電磁場の中の四次元的な形の運動方程式である。この F^{ik} を (4.7)a と (4.7)b を使って書きなおすと，

$$F_{32}=\frac{\partial A_2}{\partial x^3}-\frac{\partial A_3}{\partial x^2}=\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y}=(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A})_x=H_x$$

$$F_{01}=\frac{\partial A_1}{\partial x^0}-\frac{\partial A_0}{\partial x^1}=-\frac{\partial A_x}{c\partial t}-\mathrm{grad}_x\,\phi=E_x$$

同様にして，

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{ik}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

§5　素粒子の場 Ψ_α による運動方程式の古典的記述

ラグランジアンを次のように書く，

$$\mathcal{L}=\int L\left(\Psi,\ \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3$$

ここで，$L\left(\Psi,\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial x}\right)$は単位体積についてのラグランジアンであり，ラグランジアン密度ともいう。この作用は，

$$S=\int_\Omega L\left(\Psi,\ \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(5.1)$$

と書ける。Ω は空間と時間で作られる体積である。Ψ_α という記号で α 番目の粒子の場を表わす。(5.1) の作用積分の汎函数微分を求めると，

$$\delta S=\int_\Omega\left[\frac{\delta L}{\delta\Psi_\alpha}\delta\Psi_\alpha+\frac{\delta L}{\delta\left(\dfrac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\ \delta\left(\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)\right]dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

$$=\int_\Omega\left[\frac{\partial L}{\partial\Psi_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\ \frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\right]\delta\Psi_\alpha dx+\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\ \delta\Psi_\alpha\right)dx\cdots\cdots(5.2)$$

第2項はガウスの定理によって，

$$\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\ \delta\Psi_\alpha\right)dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3=\int_\Sigma\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\ \delta\Psi_\alpha\,d\sigma_\mu\cdots\cdots\cdots\cdots(5.3)$$

と書ける。ここでΣは四次元体積 Ω の表面で，$d\sigma_\mu$ は四次元空間の微少面積である。Σ上で，$\delta\Psi_\alpha\to0$のとき$\delta S\to0$ とすると，(5.3) 式の右辺はゼロとなるから，(5.2) の第2項はゼロになる。よって第1項の被積分函数はゼロとなることから，

$$\frac{\delta S}{\delta \Psi_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial \Psi_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5.4)$$

Ψ_α, ϕ_β……等々によって記述される，数個の場があるときには，同様に

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_\beta}=\frac{\partial L}{\partial \phi_\beta}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_\mu}\right)}=0 \qquad 等々$$

となる。

ここで§4で導入した電磁場を表わす四次ベクトル A_i によって，場をあらわすとすれば，(5.4)式は

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu}=\frac{\partial L}{\partial A_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5.5)$$

となり，やはり§4で導入した $F_{\mu\nu}$ を使って，$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=j_\mu$ とすると，

$$L=-\frac{1}{4}F_{\mu\sigma}\ F_{\mu\sigma}+j_\mu\ A_\mu \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5.6)$$

とすることが出来る。このラグランジアンは (5.5) 式を満足する。

§ 6　複素擬スカラー場とその量子化

複素擬スカラー場が，クラインゴルドン方程式を満すものとすると，

$$(\Box-k^2)\phi(x)=0 \qquad \Box=\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.1)$$

ここで，$\phi(x)=\phi_1(x)+i\ \phi_2(x)$

$$\phi_1=\frac{\phi+\phi^*}{2} \qquad \phi_2=\frac{\phi-\phi^*}{2}$$

*は複素共役をあらわすものとする。又，

$$(\Box-k^2)\ \phi^*\ (x)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.2)$$

も成立する。ラグランジアンを

$$L=-\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\rho}\frac{\partial \phi}{\partial x_\rho}-k_2\ \phi^*\phi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.3)$$

とすると，

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}=-k^2\phi^*,\ \frac{\partial L}{\partial \phi^*}=-k^2\ \phi,\ \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\rho}\right)}=-\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\rho},\ \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\rho}\right)}=-\frac{\partial \phi}{\partial x_\rho} \quad \cdots(6.4)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \phi}=\frac{\partial L}{\partial \phi}-\frac{\partial}{\partial x_\rho}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\rho}\right)}=-k^2\ \phi^*+\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\rho}\right)=(\Box-k^2)\phi^*=0 \quad \cdots(6.5)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \phi^*}=\frac{\partial L}{\partial \phi^*}-\frac{\partial}{\partial x_\rho}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\rho}\right)}=-k^2\ \phi+\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\rho}\right)=(\Box-k^2)\phi=0 \quad \cdots\cdots(6.6)$$

となって，(6.1) のクラインゴルドン方程式は汎函数から導かれる運動方程式と一致する。これは一般に中間子の運動をあらわす方程式である。

それ故，エネルギー・モーメンタムテンソル [appendix B] は，

$$T_{\mu\nu}=\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\right)}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}+\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial x_\nu}\right)}\frac{\partial\phi^*}{\partial x_\mu}-L\delta_{\mu\nu}=-\frac{\partial\phi^*}{\partial x_\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\frac{\partial\phi^*}{\partial x_\mu}-L\delta_{\mu\nu}$$

…………(6.7)

$$H=\int\left(\nabla\phi^*\nabla\phi+k^2\phi^*\phi+\frac{\partial\phi^*}{\partial x_0}\frac{\partial\phi}{\partial x_0}\right)d\boldsymbol{x} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.8)$$

$$P_k=-\int\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial x_0}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}+\frac{\partial\phi}{\partial x_0}\frac{\partial\phi^*}{\partial x_k}\right)d\boldsymbol{x} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.9)$$

さらに，

appendix C

$$j_\mu=-ie\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)}\phi-\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial x_\mu}\right)}\phi^*\right)=ie\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial x_\mu}\phi-\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\phi^*\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.10)$$

である。さらに場の荷電

$$Q=-i\int j_4(x)d\boldsymbol{x} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.11)$$

とかける。ここから量子化するために，$\phi(x)$ にフーリェ変換をほどこして，モーメンタム表示になおす。

$$\phi(x)=\phi^+(x)+\phi^-(x)$$

$$\phi^+(x)=\frac{1}{2\pi^{3/2}}\int\frac{1}{\sqrt{2q_0}}a(q)e^{iqx}d\boldsymbol{q}$$

$$\phi^-(x)=\frac{1}{2\pi^{3/2}}\int\frac{1}{\sqrt{2q_0}}a(-q)e^{-iqx}d\boldsymbol{q} \qquad q_0=\sqrt{k^2+\boldsymbol{q}^2}$$

(6.9) と (6.11) は

$$P_\mu=\int\left(a^*(q)a(q)+a^*(-q)a(-q)\right)q_\mu\,d\boldsymbol{q} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.12)$$

$$Q=e\int\left[a^*(q)a(q)-a^*(-q)a(-q)\right]d\boldsymbol{q} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.13)$$

又，
$$i\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_0}=[\phi(x),\ H] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.14)$$

$$[a(q),\ H]=q_0\,a(q),\quad [a(-q),\ H]=-q_0\,a(-q)$$

$$[a^+(q),\ H]=-q_0\,a^+(q),\quad [a^+(-q),\ H]=q_0\,a^+(-q) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.15)$$

このように場 $\phi(x)$は $a^+(q)$ と $a(-q)$ という２つの生成演算子と，$a(q)$，$a^+(-q)$ という２つの消滅演算子を持つ。

$$a(-q)=b^+(q),\qquad a^+(-q)=b(q) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.16)$$

として，(6.12)，(6.13) を書きなおすと，

$$H=\int\left[a^+(q)a(q)+b^+(q)\,b(q)\right]q_0d\boldsymbol{q} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.17)$$

$$P_k=\int\left[a^+(q)a(q)+b^+(q)\,b(q)\right]q_kd\boldsymbol{q} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.18)$$

$$Q=e\int\left[a^+(q)a(q)-b^+(q)\,b(q)\right]d\boldsymbol{q} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.19)$$

となる。

真空状態を ϕ_0 とすると,

$$a(q)\phi_0=0 \qquad b(q)\phi_0=0 \qquad H\phi_0=0 \qquad P\phi_0=0 \qquad Q\phi_0=0$$

であり，又これらの生成消滅演算子は次の交換関係をみたす,

$$\begin{aligned}
&[a(q),\ a(q')]=0 \quad [b(q),\ b(q')]=0,\ [a(q),\ b(q')]=0 \\
&[a(q),\ a^+(q')]=\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'),\ [b(q),\ b^+(q')]=\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') \\
&[a(q),\ b(q')]=0 \quad [a(q),\ b^+(q')]=0 \\
&[a^+(q),\ a^+(q')]=0 \quad [b^+(q),\ b^+(q')]=0,\ [a^+(q),\ b^+(q')]=0 \\
&[a^+(q),\ b(q')]=0
\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots(6.20)$$

(6.20) の交換関係を使うと，(6.15) は簡単に証明出来る。

$$[a(q),\ H]=\int[a(q),\ a^+(q')]a(q')q_0'\,d\boldsymbol{q}=q_0\,a(q)$$

$$[b(q),\ H]=\int[b(q),\ b^+(q')]b(q')q_0'\,d\boldsymbol{q}=q_0\,b(q) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.21)$$

同様に

$$[a(q),\ \boldsymbol{P}]=\boldsymbol{q}a(q) \qquad [b(q),\ \boldsymbol{P}]=\boldsymbol{q}b(q)$$

$$[\boldsymbol{P},\ a^+(q)]=\boldsymbol{q}a^+(q) \qquad [\boldsymbol{P},\ b^+(q)]=\boldsymbol{q}b^+(q) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.22)$$

となる。荷電について,

$$[Q,\ a^+(q)]=ea^+(q),\ [Q,\ b^+(q)]=-eb^+(q)$$

$$Qa^+(q)\phi_0=([Q,\ a^+(q)]+a^+(q)Q)\phi_0=ea^+(q)\phi_0$$

$$Qb^+(q)\phi_0=([Q,\ b^+(q)]+b^+(q)Q)\phi_0=-eb^+(q)\phi_0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.23)$$

(6.22)と(6.23)によって,

$$\begin{aligned}
P_\mu\, b^+(q')a^+(q)\phi_0&=([P_\mu,\ b^+(q')]+b^+(q')P_\mu)a^+(q)\phi_0 \\
&=(q_\mu'+q_\mu)b^+(q')a^+(q)\phi_0
\end{aligned}$$

$$Q\,b^+(q')a^+(q)\phi_0=[(-e)+(e)]\,b^+(q')a^+(q)\phi_0$$

このように $b^+(q')a^+(q)\phi_0$ は，四次元モーメンタム q_μ の粒子と，q_μ' の反粒子の存在する状態であると，考えることが出来る。

appendix A

$$[A,\ B]=AB-BA$$

appendix B

$$\left\{\begin{array}{l} x'=x_\mu+a_\mu \\ \Psi_\alpha'(x')=\Psi_\alpha(x) \end{array}\right. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

という変換を考える。ここで a_μ は任意の四次元ベクトルである。(1)の変換に対して，ラグランジアンはインバリアントで,

$$L\left(\Psi(x),\ \frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}\right)=L\left(\Psi'(x'),\ \frac{\partial\Psi'(x')}{\partial x'}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

が成立するものとする。

$$P_\mu = i\int T_{\mu 4} d\boldsymbol{x}^{(\text{註})} \quad \cdots\cdots(3) \qquad T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\nu}\right)} \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu} - L\delta_{\mu\nu} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ここで，
$$\Psi_\alpha'(x) = \Psi_\alpha(x-a) = \Psi_\alpha(x) - a_\mu \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\begin{cases} \Psi_\alpha' = \Psi_\alpha(x) + \delta\Psi_\alpha(x) \\ x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

故に，
$$\begin{cases} \delta\Psi_\alpha(x) = -a_\mu \dfrac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu} \\ \delta x_\mu = a_\mu \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x_\nu}\delta x_\nu = 0 \text{より}, \qquad \delta L + \frac{\partial L}{\partial x_\nu}\delta x_\nu = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\delta L = L\left(\Psi'(x), \frac{\partial \Psi'(x)}{\partial x}\right) - L\left(\Psi(x), \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\nu}\right)}\delta\Psi_\alpha\right) \quad \cdots(9)$$

(5.2)式より，(9) が成立して (8) を用いると，

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\nu}\right)}\delta\Psi_\alpha + L\delta x_\nu\right) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

(10) と (7) より

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(L\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\nu}\right)} \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)a_\mu = 0 \qquad \therefore \quad \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0$$

故にこのエネルギーモーメンタムテンソルは保存量であることがわかる。ここでは複素共役場のことは述べなかったが，同様に証明出来る。

(註)古典論において，

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \qquad H(p,\ q) = p\dot{q} - L(q,\ \dot{q})$$

appendix C　j_μ も又保存量であることが証明出来る。

参　考　文　献

① Introducfion to Feynman Diagrams　S.M. Bilenly

② 場の古典論　ランダウ・リフシッツ

③ スタンフォード大学図書室での文献からのコピー

原稿受理 1979年12月20日

Summary

Functional analysis occurring in the theory of dynamics and in the field theory

Michiko Miyamoto

I described functional analysis and how it occurs in the theory of dynamics and in the field theory.

At the end of this paper, I touched on the quantization of field. I quoted from "Introduction to Feynman Diagrams" by S. M. Bilenky explaining it.