

π -中間子のフォトプロダクション と散乱について

宮 本 道 子

最も典型的な2体問題である π 中間子の核子による散乱と核子からの中間子のフォトプロダクションについて、1961年に書かれた、N. F. NELIPA 著“PHOTOPRODUCTION AND SCATTERING OF PI-MESONS”をまとめてみた。

§ 1. 実験データ

(1) 中間子の核子による散乱

π 中間子と核子の散乱を記号で書いてみると、次のようになる

$$\pi^+ + p \longrightarrow \pi^+ + p \quad \dots\dots\dots(1a)$$

$$\pi^- + p \longrightarrow \pi^0 + n \quad \dots\dots\dots(1b)$$

$$\pi^- + p \longrightarrow \pi^- + p \quad \dots\dots\dots(1c)$$

300MeV以下のエネルギー領域で、 S 位相と、 P 位相への散乱のみを考えると、(1)の過程における重心系での角 θ に依る分布は、次の様に見える

$$\sigma(\theta) = a + b \cos \theta + c \cos^2 \theta \quad \dots\dots\dots(1.2)$$

(1)のそれぞれの過程は、中間子のエネルギーによって決定される a, b, c という係数の値によって特徴づけられる。そして、これら a, b, c の値は実験値のグラフから求めることが出来る。一方、散乱の位相を含む理論的表現を a, b, c に適用することが出来る。荷電独立性¹の仮定が用いられると、(1)の過程は、 S 波と P 波の計算の場合、 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_{33}, \alpha_{31}, \alpha_{13}, \alpha_{11}$ という6つの位相によって定義される。

位相解析により、フェルミの解によると、 α_{33} という位相が、ヤンの解によると α_{31} という位相が散乱に大きな寄与をするということが知られている。ここでは、フェルミの解が正しいことにする。

Table 2によると、 $\alpha_{11}, \alpha_{13}, \alpha_{31}$ は考慮に入れられていない。これは、 $\alpha_{33}, \alpha_3, \alpha_1$ に比べると小さいからである。正の位相 α_{33} は主要な役割を演じている。そして、 $E\gamma$ の小さいところでは、 α_1 と α_3 は異符号である。

(2) 核子からの中間子のフォトプロダクション

核子からの π 中間子のフォトプロダクションは次の4つの方法が可能である

$$\gamma + p \longrightarrow n + \pi^+ \quad \dots\dots\dots(2a)$$

$$\gamma + p \longrightarrow p + \pi^0 \quad \dots\dots\dots(2b)$$

1. 同じ角運動量とスピンを持つならば、任意の2粒子間の核力は同じであるという仮定。

$$\gamma+n \rightarrow p+\pi^- \quad \dots\dots\dots(2c)$$

$$\gamma+n \rightarrow n+\pi^0 \quad \dots\dots\dots(2d)$$

$E\gamma \leq 400$ MeV のエネルギーの光子が S 状態と P 状態においてのみ π 中間子を創ると仮定する。そこで、重心系における π 中間子の角 θ に依存する分布は、散乱の場合のように、次のように定義することが出来る

$$\sigma(\theta) = A + B\cos\theta + C\cos^2\theta \quad \dots\dots\dots(1.3)$$

(2)のそれぞれの過程は、光子のエネルギーによって決定される係数 A, B, C によって表わされる。

陽子からの光子によって創られる π 中間子の角 θ に依存する分布は、多くの実験家によって研究されたが、(2a)に対する係数 A^+, B^+, C^+ と (2b)に対する係数 A^0, C^0 の平均的な値は、**Fig. 1** と **Table 1** に与えられている。 B^0 の値は大変小さいので、**Table 2** には書かれて

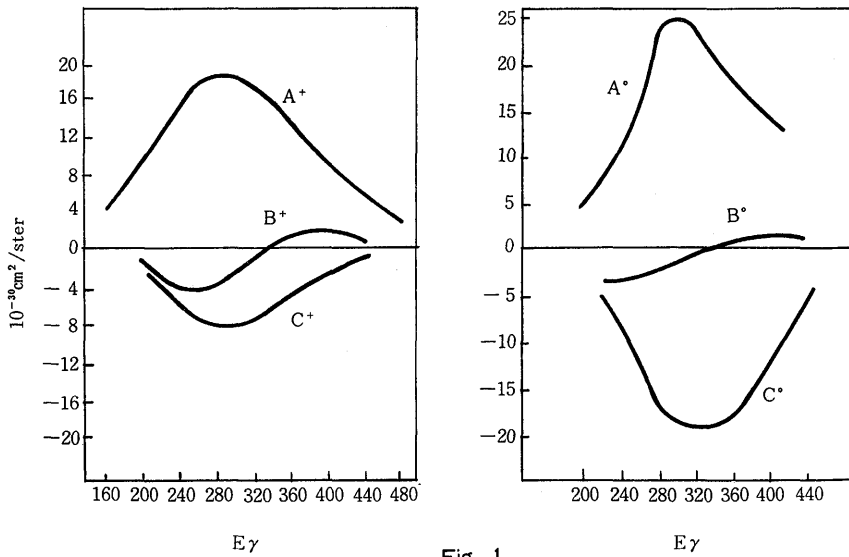


Table 1. フォトプロダクションを表わす係数の平均値 ($10^{-30}\text{cm}^2/\text{ster}$)

E_γ	A^+	B^+	C^+	A_{exp}^0	C_{exp}^0	A^0	C^0
200	9.3 ± 0.5	-1.8 ± 1.0	-3.3 ± 1.6	3.5 ± 0.5	-3.3 ± 2.0	3.0 ± 0.4	-2.8 ± 1.7
230	13.1 ± 0.5	-3.0 ± 0.9	-5.7 ± 1.0	7.4 ± 1.0	-6.8 ± 2.0	6.6 ± 0.9	-6.1 ± 1.8
260	16.9 ± 0.5	-4.3 ± 1.0	-7.4 ± 1.0	13.3 ± 1.5	-11.6 ± 4.0	12.2 ± 1.4	-10.7 ± 3.7
290	18.9 ± 0.5	-3.8 ± 1.2	-7.9 ± 0.9	22.0 ± 1.0	-17.6 ± 4.0	20.7 ± 0.9	-16.6 ± 3.8
320	18.4 ± 0.5	-1.1 ± 0.9	-7.2 ± 0.9	25.8 ± 1.0	-22.0 ± 4.0	24.6 ± 1.0	-20.9 ± 3.8
350	15.3 ± 0.5	$+1.1 \pm 0.6$	-5.4 ± 0.9	23.3 ± 0.8	-20.8 ± 3.0	22.4 ± 0.8	-20.0 ± 2.9
380	11.3 ± 0.4	$+2.5 \pm 0.6$	-3.0 ± 0.7	17.8 ± 1.5	-15.0 ± 2.5	17.2 ± 0.5	-14.5 ± 2.4
410	8.2 ± 0.4	$+3.2 \pm 0.8$	-0.8 ± 0.8	12.8 ± 0.4	-10.0 ± 1.5	12.4 ± 0.4	-9.7 ± 1.5
440	6.2 ± 0.3	$+3.5 \pm 0.7$	$+0.4 \pm 0.8$	9.2 ± 0.4	-6.8 ± 1.4	9.0 ± 0.4	-6.6 ± 1.4
470	4.7 ± 0.3	$+3.7 \pm 0.6$	$+1.0 \pm 0.8$	7.0 ± 0.4	-5.0 ± 1.3	6.8 ± 0.4	-4.9 ± 1.3

いない。 $\frac{A^0}{C^0} = 1.22 \pm 0.1$ という値を $E\gamma < 400 \text{ MeV}$ に対してとっていることがわかる。

§ 2. 核子からの π 中間子のフォトプロダクションに対する微分断面積

角運動量の保存則と、パリティの保存の定理を用いて、核子からの π 中間子のフォトプロダクションについて、 π 中間子の θ に依存する分布を見出す。

反応は、次のように図式的に表わされる。

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \theta\text{-相対的軌道モーメント} \\ i=1\text{-スピン} \\ m_i\text{-スピンの射影} \\ L\text{-トータルモーメント} \\ m_L\text{-}L\text{の射影} \\ p = \begin{cases} 0\text{-電氣的多重極} \\ 1\text{-磁氣的多重極} \end{cases} \end{array} \right. + \text{核子} \left\{ \begin{array}{l} I\text{-スピン} \\ m_I\text{-スピンの射影} \end{array} \right. \\
 \longrightarrow \text{中間状態} \left\{ \begin{array}{l} J\text{-トータルモーメント} \\ M\text{-}J\text{の射影} \end{array} \right. \\
 \longrightarrow \text{反跳核子} + \pi\text{中間子} \left\{ \begin{array}{l} \theta'\text{-軌道モーメント} \\ \mu'\text{-}\theta'\text{の射影} \\ S' = \frac{1}{2}\text{-反跳核子と}\pi\text{中間子のトータルスピン} \\ m_s'\text{-}S'\text{の射影} \end{array} \right.
 \end{array}$$

例えば、陽子と光子が衝突する場合、次のような反応が可能である



2個の粒子のそれぞれが、反応の対応するチャネルを定義する。 γp で定義される反応のチャネルは開始と呼ばれる。 $\gamma' p, n\pi^+, p\pi^0$ によって定義される反応は結果と呼ばれる。

系の遷移確率をチャネル $\alpha L p$ とチャネル $\alpha' \ell' s'$ とトータルモーメント J で、 $S^{J\alpha'\ell's';\alpha L p} \equiv S$ によって表わす。

単一のチャネルとの反応は複素数 S_{11} によって表わされる。もしこのチャネルに対する入射波が $\exp(-ikz)$ によって表わされるならば、結果の波は $S_{11}\exp(ikr)$ という型を持つ。単一のチャネルの場合、それがその結果となるから、絶対値 S_{11} は 1 になるであろう。それ故、 S_{11} は $\exp(2i\alpha)$ の様に表わされうる。ここで、 α は散乱の位相である。このように、開始のチャネル i から結果のチャネル k への散乱行列 S_{ik} を導入する。

開始のチャネルの球面波を

$$\Phi_\alpha \approx A\phi_\alpha^- + B\phi_\alpha^+ \dots\dots\dots(2.3)$$

とし、結果のチャネルの球面波を

$$\Phi_{\alpha'} \approx D\phi_{\alpha'}^+ \dots\dots\dots(2.3')$$

とすると、散乱行列とこれら係数の関係は、

$$D_{\alpha'} \approx S_{\alpha\alpha'} A_\alpha$$

となる。

さて我々は開始のチャネルの波動関数 $\Phi_{\alpha L p}$ に対する一つの表現を見出そう。開始の系の光子と核子のトータル角運動量 J は、光子のトータルモーメントム L と核子のスピン I の和に等しい。与えられた L に対する光子の波動関数と核子のスピン関数は知られているので、光子-核子系をモーメントム J とその射影 M で記述する開始のチャネルの漸近的波動関数は次のように書ける

$$\vec{\Phi}_{JLp}^{JM(\pm)} = \sum_{m_I} C_{L, M-m_I, I m_I}^{JM} \vec{A}_{Lp}^{M-m_I(\pm)} \chi_I^{m_I} \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

ここで、 $C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{JM}$ はクレプシュゴルドン係数で、 $\chi_I^{m_I}$ はスピン波動関数であり、 \vec{A} は光子の波動関数である。

トータル角運動量 L と軌道モーメントム ℓ を持つ光子の波動関数は次のように書ける

$$\vec{A}_{Lp}^{m_L(\pm)} = -\sqrt{2} \sum_{\ell} C_{L-1, 11}^{\ell 0} \delta(\ell, p) i^{\ell-L-p} \vec{\Phi}_{L\ell}^{m_L(\pm)} \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

ここで、

$$\vec{\Phi}_{L\ell}^{m_L(\pm)} = \sum_{m_i} C_{\ell, m_L-m_i, 1 m_i}^{L m_L} Y_{\ell}^{m_L-m_i}(\theta) \vec{\chi}_{m_i} \exp\left[\pm i\left(kr - \frac{\pi \ell}{2}\right)\right] \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

ここで、 $\vec{\chi}_{m_i}$ -光子のスピン関数である、

$Y_{\ell}^m(\theta)$ -規格化された球関数、

$C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{JM}$ -クレプシュゴルドン係数

k -光子の波数、

$p=0$ 又は 1 、電気的多重極又は磁気的多重極に対して、 $\delta(\ell, 0)$ 又は $\delta(\ell, 1)$ そして

$\ell=L$, $\ell=L\pm 1$ に対してそれぞれゼロではない、

m_j - z 軸の上への対応するモーメントムの射影、

θ -散乱角

そして、より一般的な型は

$$\vec{\Phi}_{\alpha L p}(JM) = \frac{1}{r_{\alpha} \sqrt{C}} \left[A_{\alpha L p}^{JM} \vec{\Phi}_{JLp}^{M(-)} + B_{\alpha L p}^{JM} \vec{\Phi}_{JLp}^{M(+)} \right] \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

A と B は入射波と結果の波に対する係数である。

結果の系のトータル角運動量 J は π 中間子の軌道角運動量 ℓ' とチャネルのスピン s' の和に等しい。与えられた J と M を持つ結果のチャネルの漸近的波動関数は π 中間子の波動関数 $Y_{\ell'}^{m_s'}$ とチャネルのスピン関数 $\chi_{s'}^{m_s'}$ を用いて、次のように書かれる

$$\Psi_{J\ell's'}^{JM(\pm)} = \sum_{m_s'} C_{\ell', M-m_s', s' m_s'}^{JM} Y_{\ell'}^{M-m_s'}(\theta) \chi_{s'}^{m_s'} \exp\left[\pm i\left(kr - \frac{\pi \ell'}{2}\right)\right] \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

結果のチャネルを J と M を用いて書くと

$$\Phi_{\alpha' \ell' s'}(JM) = \frac{1}{r_{\alpha'} \sqrt{\nu_{\alpha'}}} D_{\alpha' \ell' s'}^{JM} \Psi_{J\ell's'}^{M(+)} \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

となり,

$$D_{\alpha' \ell' s'}^{JM} = \sum_{\alpha L p} S_{\alpha' \ell' s', \alpha L p} A_{\alpha L p}^{JM} \quad \dots\dots\dots(2.10)$$

となる。

開始のチャンネルの入射平面波は次のように定義される；

$$\exp(ikz) \chi_1^m \chi_I^{m_I}$$

このように、入射光子は z 軸にそって動くと考え、 $m_i = \pm 1$ である。そしてこれらは光子の2つのトランスバースポーラリゼーションであると考えることが出来る。(2.4) の関数に従って分布する平面波に対する漸近的表現は次のようになる

$$\begin{aligned} \exp(ikz) X_{m_i} X_I^{m_I} &= \frac{i}{kr} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{L, J, p} i^{L+P} (2L+1)^{\frac{1}{2}} m^p C_{LmIm_I}^{JM} \\ &\times \left[\vec{\Phi}_{JLp}^{JM(-)} - \vec{\Phi}_{JLp}^{JM(+)} \right] \quad \dots\dots\dots(2.11) \end{aligned}$$

(2.7) と (2.11) の $\Phi_{JLp}^{JM(-)}$ に対する係数の比較は入射球面波の振巾を我々に与える

$$A_{\alpha L p}^{JM} = \frac{i}{k\alpha} \sqrt{\frac{\pi c}{2}} i^{L+P} \sqrt{2L+1} m^p C_{LmIm_I}^{JM} \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

(2.3') からフォトプロダクションの振巾を見出すために、表現(2.9)における結果の球面波の係数を見出さねばならないということになる。(2.12) を (2.10) に代入して、又その結果を(2.9)に代入して、我々は次の関係を見出す

$$\Phi_{\alpha' \ell' s'} = \frac{i}{k\alpha} \sqrt{\frac{c}{\nu_{\alpha'}}} \frac{\exp(ik_\alpha r_{\alpha'})}{r_{\alpha'}} f_{\alpha\alpha'} \chi_s^{m_s'} \quad \dots\dots\dots(2.12')$$

ここで、 $f_{\alpha\alpha'}$ は、きまったスピンの射影の値を持つ粒子のフォトプロダクションの求められた振巾である。

これは次のようになる

$$f_{\alpha\alpha'} = \sum_{J_1 J_2 \ell'} i^{J_1 - \ell' + p} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2L+1)^{\frac{1}{2}} m^p C_{LmIm_I}^{JM} C_{\ell' \mu', s' m_s'}^{J_1 M} S_{\alpha' \ell' s', \alpha L p}^{J_2} Y_{\ell'}^{\mu'}(\theta) \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

そして $\sigma(\theta)$ は

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4k^2} \sum_{m_s' m_I m} |f_{\alpha\alpha'}(\theta)|^2 \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

球面関数についての公式を用いると、

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \frac{1}{4k^2} \sum_{\substack{J_1 J_2 L_1 L_2 \\ \nu_1 \nu_2 \ell_1' \ell_2' k}} i^{-L_1 + L_2 - \nu_1 + \nu_2 + \ell_1' - \ell_2'} S^*(1) S(2) \\ &\times \left[(2L_1+1)(2L_2+1)(2\ell_1'+1)(2\ell_2'+1) \frac{1}{2n+1} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times C_{\ell_1' 0 \ell_2' 0}^{m_0} \sum_{m_s' m_I m} (-1)^{\mu'} m^{\nu_1 + \nu_2} C_{L_1 m, \ell m_I}^{J_1 M} C_{L_2 m, \ell m_I}^{J_2 M} C_{\ell_2' \mu', s' m_s'}^{J_1 M} \\ &\times C_{\ell_1' - \mu', \ell_2' \mu'}^{m_0} \sqrt{\frac{\pi}{4}} Y_{n_0}(\theta) \quad \dots\dots\dots(2.15) \end{aligned}$$

もし、(2.15)におけるモーメントの射影に関して二重の和を取るラッホ公式を用いるならば、この表現は十分に簡単化されて、

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \frac{1}{16k^2} \Sigma(-1) S^*(1) S(2) i^{n-L_1+L_2-m_1-m_2} \\ &\quad \times [(2L_1+1)(2L_2+1)(2J_1+1)(2J_2+1)]^{\frac{1}{2}} C_{L_1, L_2-1}^{m_0} \\ &\quad \times W\left(L_1 J_1 L_2 J_2; \frac{1}{2} n\right) Z\left(\ell_1' J_1 \ell_2' J_2; \frac{1}{2} n\right) \\ &\quad \times p_n(\cos \theta) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2.16)$$

と書ける、ここで

$$\begin{aligned} Z(\ell_1 J_1 \ell_2 J_2; sn) &= i^{n-\ell_1+\ell_2} [(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2J_1+1)(2J_2+1)]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times W(\ell_1 J_1 \ell_2 J_2; sn) C_{\ell_1, \ell_2, 0}^{n_0} \end{aligned}$$

$W(\ell_1 J_1 \ell_2 J_2; sn)$ = ラッホ係数
 $p_n(\cos \theta)$ - ルジャンドル多項式
 ℓ' - 中間子の軌道モーメント
 J - 中間状態のトータルモーメント

和は $J_1, J_2, L_1, L_2, p_1, p_2, \ell_1', \ell_2'$ と n に関して取られる。

さて練習のために、(2.16)の代わりに次の表現を用いる。

(a) もし L_1+L_2+n が偶数ならば、

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \frac{1}{16k^2} \Sigma(-1) S^*(1) S(2) [(2J_1+1)(2J_2+1)]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times Z(L_1 L_1 L_2 L_2; 1n) W\left(L_1 J_1 L_2 J_2; \frac{1}{2} n\right) Z\left(\ell_1' J_1 \ell_2' J_2; \frac{1}{2} n\right) \\ &\quad \times p_n(\cos \theta) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2.17)$$

(b) もし L_1+L_2+n が奇数ならば、

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \frac{1}{16k^2} \Sigma(-1) S^*(1) S(2) (-1)^{m_1} \sqrt{\frac{2L_2+1}{L_2}} \\ &\quad \times [(2J_1+1)(2J_2+1)]^{\frac{1}{2}} Z(L_1 L_1 L_2+1 L_2; 1n) \\ &\quad \times W\left(L_1 J_1 L_2 J_2; \frac{1}{2} n\right) Z\left(\ell_1' J_1 \ell_2' J_2; \frac{1}{2} n\right) p_n(\cos \theta) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2.17')$$

(2.17) によって、唯一の中間状態の存在する場合 ($J_1=J_2=J$) が 2つの中間状態が可能な場合と同じように考えるということが重要である。

(2.17) にあらわれる n は次の範囲でかわりうる；

$$|\ell_1' - \ell_2'| \leq n \leq |\ell_1' + \ell_2'| \quad \dots\dots\dots(2.18)$$

さらに $p_1+p_2+L_1+L_2-n$ は偶数であるべきである。それ故、 $p_1+p_2+L_1+L_2+\ell_1'+\ell_2'$ は偶数、そして $\ell_1'+\ell_2'+n$ は偶数である。

はじめの条件は、パリティの保存則から得られ、次のものは Z の中にあらわれる係数 $C_{\ell_1', \ell_2', 0}^{m_0}$ が、もし $\ell_1'+\ell_2'+n$ が偶数のとき、そのときのみゼロではないということから得られる。

(2.17)式の応用を、ある特殊な場合におけるフォトメゾンの θ に依存する分布を見出すために考えてみる。

ラッホ係数とZ係数の数値表を用いて、

(1) π 中間子が磁気双極子フォトン ($p_1=p_2=1, L_1=L_2=1$) によってのみ創られるものとする。核子のパリティが正であるので、2つの中間状態 $J=\frac{3}{2}+$ と $J=\frac{1}{2}+$ とが可能である。又、 π 中間子の取りうる軌道角運動量は、 $\ell'=\ell_1'=\ell_2'=1$ である。すなわち磁気双極子フォトン π 中間子をP状態にのみ創る。 n は0, 1, 2を取る。 $n=1$ は $\ell_1'+\ell_2'+n$ が偶数になるという条件を満たさないのを捨て去る。このようにして(2.17)に換算された値を代入すると、

(a) $J=\frac{3}{2}+$ に対して、

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2} |M_d\left(\frac{3}{2}\right)|^2 (5 - 3\cos^2\theta) \quad \dots\dots\dots(2.19)$$

を得る。ここで、 $M_d\left(\frac{3}{2}\right)$ は $J=\frac{3}{2}$ を持つ中間状態をとうして、磁気双極子放射のP状態における π 中間子の生成を表わす遷移行列である。

(b) $J=\frac{1}{2}+$ に対して、

$$\sigma(\theta) = |M_d\left(\frac{1}{2}\right)|^2 \quad \dots\dots\dots(2.20)$$

(2) 電気的雙極子放射に対して、

(a) $J=\frac{1}{2}-$ に対して

$$\sigma(\theta) = |E_d\left(\frac{1}{2}\right)|^2 \quad \dots\dots\dots(2.21)$$

(b) $J=\frac{3}{2}-$ に対して

$$\sigma(\theta) = |E_d\left(\frac{3}{2}\right)|^2 \frac{3}{2} (1 + \cos^2\theta) \quad \dots\dots\dots(2.22)$$

を得る。

(3) $J=\frac{3}{2}+$ と $J=\frac{1}{2}-$ の2つの中間状態が可能なる場合には $\sigma(\theta)$ は次のようになる

$$\sigma(\theta) = |E_d|^2 + 2\text{Re}\left[E_d^* M_d\left(\frac{3}{2}\right)\right] \cos\theta + \frac{1}{2} |M_d\left(\frac{3}{2}\right)|^2 (5 - 3\cos^2\theta) \quad \dots\dots\dots(2.23)$$

(4) π 中間子がS状態とP状態に創られる場合を考える。電気的雙極子放射によって、 π 中間子はS状態に創られる(E_d)、又磁気的雙極子放射と電気的的四重極放射によって、 π 中間子はP状態に創られる。これらの干渉項も考慮に入れると、フォトメゾンの角分布は次のようになる、

$$\sigma(\theta) = |E_d|^2 + |M_d\left(\frac{1}{2}\right)|^2 + \frac{1}{2} |M_d\left(\frac{3}{2}\right)|^2 (2 + 3\cos^2\theta)$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{8}|E_q|^2(1+\cos^2\theta)-2\text{Re}\left[E_a^*\left(M_a\left(\frac{3}{2}\right)-M_a\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}E_q\right)\right]\cos\theta \\
& -\frac{1}{2}\text{Re}\left[E_q^*\left(M_a\left(\frac{3}{2}\right)-M_a\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right](3\cos^2\theta-1)-\text{Re}\left[M_a^*\left(\frac{3}{2}\right)M_a\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\
& \times 3(\cos^2\theta-1) \dots\dots\dots(2.24)
\end{aligned}$$

§ 3. 散乱過程とフォトプロダクションの関係

π 中間子が S 状態と P 状態にのみ創られるエネルギーの領域を考えると、 π 中間子の角分布は式 (2.24) で記述される。このように、フォトプロダクション(2)の4つの過程は、 E_a 、

$M_a\left(\frac{1}{2}\right)$ 、 $M_a\left(\frac{3}{2}\right)$ 、 E_q の4つの係数によって特徴づけられる。それ故、全部で16個の知られていない複素数がある。そして、荷電対称性を利用して、4つの係数はそれぞれ3個の量によって表わされるので、結局12個の知られていない係数を得る。

それは、次のようにしてなされる。

π 中間子-核子系に対するシュレディンガー方程式から出発する

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}_0\psi \dots\dots\dots(3.1)$$

ここで、 \hat{H}_0 は系のハミルトニアンである。

電磁場のハミルトニアンにおいて、(2)の過程を導入するために、 \hat{H}_0 の中で、 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ と $\frac{\partial}{\partial X_i}$ を次のようにおきかえる。ここで、 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ と $\frac{\partial}{\partial X_i}$ はそれぞれ、 π 中間子と核子の実関数である

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} & \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} + ie\hat{q}A_i \\
\frac{\partial}{\partial X_i} & \longrightarrow \frac{\partial}{\partial X_i} + ie\hat{L}_3A_i
\end{aligned} \dots\dots\dots(3.2)$$

$\hat{q}=\frac{1+\hat{\tau}_3}{2}$ は核子の荷電オペレーターで、 \hat{L}_3 は π 中間子の荷電オペレーターである。 $\hat{\tau}_3$ は z 軸への核子の荷電スピンのオペレーターの射影である。

電磁的相互作用は、小さな摂動と考えることが出来る。(3.2)を代入した後に行われるハミルトニアンは、 eA_i の巾について展開出来る。もし一次の項のみに限定すれば、(3.1)式のかわりに次の方程式を得る

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=(\hat{H}_0+\hat{H}_e)\psi \dots\dots\dots(3.3)$$

$$\text{ここで、} \hat{H}_e=e\hat{a}\hat{q}A_i+e\hat{b}\hat{L}_3A_i+\dots\dots\dots(3.3')$$

そして \hat{a} と \hat{b} は展開係数である。開始の状態 ψ_0 から、終状態 (中間子+核子) への変換は次の行列要素で表わされる。

$$T=(\hat{\psi},\hat{H}_e\hat{\psi}_0) \dots\dots\dots(3.4)$$

さて、荷電空間における x 軸についての 180° 回転に関して、ハミルトニアン \hat{H}_0 が不変であるという仮定のもとに、荷電対称性の仮定を利用しよう。(すなわち、 $\pi^\pm \leftrightarrow \pi^\mp$ 、中性子 \leftrightarrow 陽子のおきかえに対して、不変である)。もし今述べた回転がなされると、(3.3')における \hat{a} と \hat{b} は符号を変えないが、 $\hat{\tau}_3$ と \hat{L}_3 は符号を変える、その結果 (eA_i を省略して)

$$\hat{H}_e' = \hat{a} \frac{1-\tau_3}{2} + \hat{b}(-\hat{L}_3) = \frac{1}{2} \hat{a} - \left(\hat{a} \frac{\tau_3}{2} + \hat{b} \hat{L}_3 \right)$$

それ故、 x 軸についての荷電空間における 180° の回転に関して、 \hat{H}_e は2つの項に分けられる、 $\hat{H}_e = \hat{S}_0 + \hat{V}_3$ (3.5) である。このうちの一方は、 $\hat{S}_0 = \frac{1}{2} \hat{a}$ で、その符号を変えないが、 \hat{V}_3 はその符号を変える。

(3.5)に対して、行列要素(3.4)は次のように書ける

$$T = (\phi_f | \hat{S}_0 + \hat{V}_3 | \phi_0) \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

例えば、 $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$ という過程に対して変換行列を計算してみる。この場合、 $n\pi^+$ という系の荷電関数は次の型をもつ、

$$\phi_f = \sqrt{\frac{1}{3}} \phi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \phi_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}} \quad \dots\dots\dots(3.7)$$

開始の状態は陽子の荷電関数によって特徴づけられる

$$\phi_0 = \phi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots(3.7')$$

(3.7)と(3.7')を(3.6)に代入して、

$$T^+ = \sqrt{2} t_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} t_1 - \sqrt{2} S \quad \dots\dots\dots(3.8)$$

を得る。ここで、 S と t_1 は π 中間子-核子の系で、荷電スピン $\frac{1}{2}$ の状態、 t_3 は荷電スピン $\frac{3}{2}$ の状態を表わす。

$$\text{同様に } T^- = \sqrt{2} t_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} t_1 + \sqrt{2} S \quad (\gamma n \rightarrow p \pi^-) \quad \dots\dots\dots(3.9a)$$

$$T^0 = 2t_3 - \frac{1}{2} t_1 + S \quad (\gamma p \rightarrow p \pi^0) \quad \dots\dots\dots(3.9b)$$

$$T^{n0} = 2t_3 - \frac{1}{2} t_1 - S \quad (\gamma n \rightarrow n \pi^0) \quad \dots\dots\dots(3.9c)$$

与えられた荷電スピンをもつ終状態が異なった多重極放射によって創られるので、次の記号を導入する、 $t_1(J, \ell', \varphi)$ と $t_3(J, \ell', \varphi)$ であるが、これらは π 中間子-核子系の多重極生成を表わす。例えば、係数 E_d^+ は $\ell=0$ の電気的雙極子放射 e_1 による S 状態への π^+ 中間子の生成に対応しているが、(3.8)より次のように書かれる、

$$E_d^+ = \sqrt{2} t_3 \left(\frac{1}{2}, 0, e_1 \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} t_1 \left(\frac{1}{2}, 0, e_1 \right) - \sqrt{2} S \left(\frac{1}{2}, 0, e_1 \right) \quad \dots\dots\dots(3.10)$$

E_d^0, E_d^-, E_d^{n0} に対しても同様である。このように、(2.24)の係数は、(2)の4つの過程に対して、すべての量 S, t_1, t_3 によって表わされる。その結果、これらの過程は12の複素数 S, t_1, t_3 によって定義される。そして位相 $\alpha_{33}, \alpha_3, \alpha_1$ 等によって、

$$t_3 \left(\frac{1}{2}, 0, e_1 \right) = e^{i\alpha_3} E_3, \quad t_1 \left(\frac{1}{2}, 0, e_1 \right) = e^{i\alpha_1} E_1, \quad S \left(\frac{1}{2}, 0, e_1 \right) = \frac{1}{2} e^{i\alpha_1} E_1' \quad \dots\dots\dots(3.23)$$

等と現わされるものとする、 E_3, E_1, E_1' 等に対応する振幅の絶対値である。

結局

$$\left. \begin{aligned} E_d^+ &= \sqrt{2} e^{i\alpha_3} E_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_1} (E_1 - E_1') \\ M_d^+\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{2} e^{i\alpha_{31}} M_{31} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_{11}} (M_{11} - M'_{11}) \\ M_d^+\left(\frac{3}{2}\right) &= \sqrt{2} e^{i\alpha_{33}} M_{33} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_{13}} (M_{13} - M'_{13}) \\ E_q^+ &= \sqrt{2} e^{i\alpha_{33}} E_{33} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_{13}} (E_{13} - E'_{13}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.24)$$

そして,

$$\left. \begin{aligned} E_d^0 &= 2e^{i\alpha_3} E_3 - \frac{1}{2} e^{i\alpha_1} (E_1 - E_1') \\ M_d^0\left(\frac{1}{2}\right) &= 2e^{i\alpha_{31}} M_{31} - \frac{1}{2} e^{i\alpha_{11}} (M_{11} - M'_{11}) \\ M_d^0\left(\frac{3}{2}\right) &= 2e^{i\alpha_{33}} M_{33} - \frac{1}{2} e^{i\alpha_{13}} (M_{13} - M'_{13}) \\ E_q^0 &= 2e^{i\alpha_{33}} E_{33} - \frac{1}{2} e^{i\alpha_{13}} (E_{13} - E'_{13}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.25)$$

(2.24) と (1.3) を比べて、理論的 M , E と実験的 A , B , C の間の関係を導くことが出来る

$$\left. \begin{aligned} A &= |E_d|^2 + |X|^2 + |Y|^2, \quad B = -2Re(E_d^* K) \\ C &= |K|^2 - |X|^2 |Y|^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.26)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{3}{2} M_d\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4} E_q, \quad Y = \frac{1}{2} \left[M_d\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} E_q \right] + M_d\left(\frac{1}{2}\right) \\ K &= \left[M_d\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} E_q \right] - M_d\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.27)$$

(3.26)は実験データの解析に大変便利であることがわかっている。

§ 4. 実験データの解析

(1) π 中間子のフォトプロダクションにおける異なる多重極の相対的役割

(3.24)と(3.25)から、 π 中間子のフォトプロダクションの微分断面積が、 E と M によって決定されることを知った。

(a) まず大変簡単な場合を考えて、 M_{33} がフォトプロダクションの過程において、基本的な役割を演ずるものとする。

この場合、(3.26)は次のようになる。

$$\begin{aligned} A^+ &= A_S + A_p^+ = A_S + \frac{5}{2} A_M, \quad C^+ = -\frac{3}{2} A_M \\ B^+ &= -\frac{3}{2} (A_S A_M)^{\frac{1}{2}} [\cos(\alpha_{33} - \alpha_3) + 2\cos(\alpha_{33} - \alpha_1)] \end{aligned} \dots\dots\dots(4.1)$$

$$A^0 = 2A_p^+ \quad C^0 = 2C^+$$

ここで、

$$A_S = |E_d^+|^2, \quad A_p^+ = A^+ - A_S, \quad A_M = 2M_{33}^2$$

である。

(4.1)式によって、Table 1 に観測値の与えられている A^+C^+ 等、5 個の量と、 A_S 、 A_M の関係がわかるから、 A_S と A_M は求められる。そして、Table 2 に記されている位相と A_S 、 A_M の値を用いて B^+ の値を求めることが出来るが、この B^+ のグラフが Fig 2 に与えられている。さらに A°/C° が 1.67 となるが、これは実験値 $A^{\circ}/C^{\circ}=1.22\pm 0.1$ と比べると、よい値とはいえない。

(b) もし我々が E_d 以外の非共鳴項に対する量を省略するならば、(例えば M_{13} 等)そして、磁気双極子と電気四重極振幅の共鳴係数が優位であるとすれば、(3.26)は次のようになる

$$\left. \begin{aligned} A^+ &= A_S + A_p^+ = A_S + A_{x0} + \frac{1}{4}A_{k0}, & C^+ &= \frac{3}{4}A_{k0} - A_{x0} \\ B^+ &= -\frac{2}{3}(A_S A_{k0})^{\pm} [\cos(\alpha_{33} - \alpha_3) + 2\cos(\alpha_{33} - \alpha_1)] \\ A^{\circ} &= 2A_p^+ & C^{\circ} &= 2C^+ \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.2)$$

ここで、

$$A_{k0} = 2 \left(M_{33} - \frac{1}{2} E_{33} \right)^2 \dots\dots\dots(4.2a)$$

$$A_{x0} = \frac{1}{2} \left(3M_{33} + \frac{1}{2} E_{33} \right)^2 \dots\dots\dots(4.2b)$$

である。

まずはじめの (4.2) の 3 つの式から、 A_S と A_{x0} と A_{k0} を決めて、それらを残りの 2 式に入れて A° と C° を決める。これら計算された値はドットグラフで、観測値は実線のグラフで Fig. 3 に記されている。これらのグラフの間には、実験誤差以上のひらきがある。

(c) 次に非共鳴項を考慮に入れて考え、その二乗は省略するものとする、(3.26)は次のようになる、

Table 2. 散乱の位相 (in degrees)

E_{γ} (Mev)	α_{33}	α_1	α_3
200	5.9	7.5	- 4.0
230	13.5	9.5	- 7.5
260	24.8	9.2	-10.7
290	42.0	6.6	-14.0
320	66.5	3.0	-16.5
350	92.0	- 1.5	-19.0
380	117.0	- 6.0	-21.5
410	142.0	-10.0	-24.0

$10^{-30}\text{cm}^2/\text{ster}$

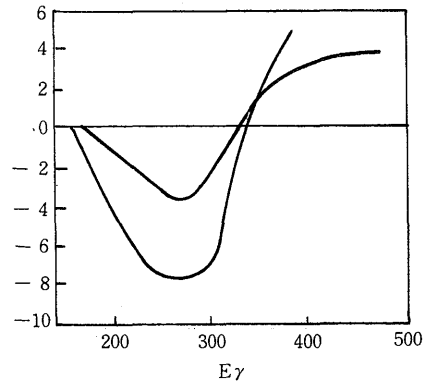


Fig. 2

$$\left. \begin{aligned}
 A^+ &= A_S + A_p^+ = A_S + A_{x0} + \frac{1}{4}A_{k0} + A_{d1} \cos \alpha_{33} \\
 B^+ &= -\frac{3}{2}(A_S A_{k0})^+ [\cos(\alpha_{33} - \alpha_3) + 2\cos(\alpha_{33} - \alpha_1)] \\
 C^+ &= \frac{3}{4}A_{k0} - A_{x0} - A_{d1} \cos \alpha_{33} \\
 A^0 &= 2A_p^+ - 3A_{d1} \cos \alpha_{33}, \quad C^0 = 2C^+ + 3A_{d1} \cos \alpha_{33}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.3)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 A_{d1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}X_0 \left\{ 3[M_{13} - M'_{13}] + \frac{1}{2}[E_{13} - E'_{13}] \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}}K_0 \left\{ [M_{13} - M'_{13}] - \frac{1}{2}[E_{13} - E'_{13}] + 2[M_{11} - M'_{11}] \right\}
 \end{aligned}$$

$$X_0^2 = A_{x0}, \quad K_0^2 = A_{k0}$$

$A_{d1} \cos \alpha_{33}$ の値は **Fig. 4** に記されている。このグラフから、 $\cos \alpha_{33}$ が $E\gamma \approx 275$ MeV で消滅していることがわかる。これは実験データと矛盾している。実験データでは、 $\cos \alpha_{33}$ は $E\gamma \approx 345$ MeV でゼロになっているから。しかし、 S 位相と P 位相のみではなく、 d 位相のようなもっと高次の位相を考えると、**Fig. 4** のドットドットグラフのようになる。これはうまく実験値とあっていて、 $E\gamma \approx 350$ MeV で $\cos \alpha_{33}$ はゼロになっている。 $A_{d1} \cos \alpha_{33}$ の計算値は

Table 3 に書かれている。

(2) 行列要素 $A_S, A_{k0}, A_p^+, A_{x0}$ のエネルギー依存性。

この依存性を解析的に表現するために、次の関数を導入する、

$$\varphi = [j_1(\eta z) \cos \alpha_{33} - h_1(\eta z) \sin \alpha_{33}]$$

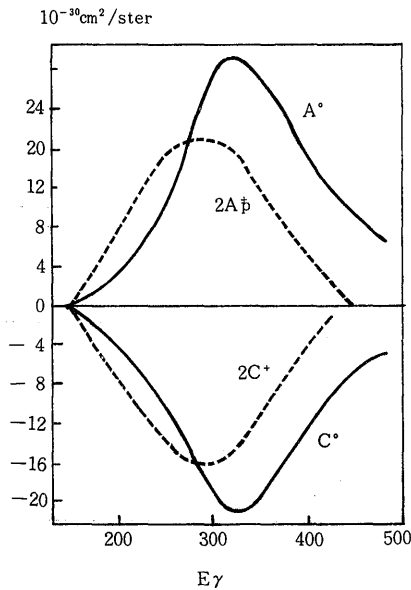


Fig. 3

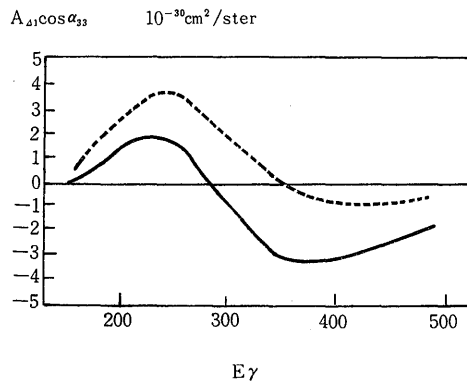


Fig. 4

Table 3. $A_s, A_{k_0}, A_p^+, A_{x_0}, A_{d_1} \cos \alpha_3$ の値の表 ($10^{-30} \text{cm}^2/\text{ster}$)

E_γ	A_s	A_{k_0}	A_p^+	A_{x_0}	$A_{d_1} \cos \alpha_3$	$A_{d_1} \cos \alpha_3$
200	5.9 ± 1.5	0.14 ± 0.15	3.4 ± 1.6	2.1 ± 1.8	1.3 ± 1.1	1.3 ± 1.2
230	7.1 ± 0.9	0.33 ± 0.20	6.0 ± 1.0	4.1 ± 1.2	1.8 ± 0.7	1.8 ± 0.9
260	8.9 ± 0.9	0.61 ± 0.29	8.0 ± 1.0	6.6 ± 1.2	1.3 ± 0.8	1.4 ± 1.3
290	10.4 ± 0.8	0.65 ± 0.41	8.5 ± 0.9	9.3 ± 1.2	-1.2 ± 0.7	-0.3 ± 1.3
320	10.9 ± 0.8	0.24 ± 0.40	7.5 ± 0.9	10.4 ± 1.2	-3.3 ± 0.7	-2.2 ± 1.4
350	8.5 ± 1.6	1.38 ± 1.50	6.8 ± 1.7	9.5 ± 2.0	-2.9 ± 1.2	-3.1 ± 1.2
380	7.8 ± 0.7	0.55 ± 0.26	3.5 ± 0.8	6.6 ± 1.0	-3.4 ± 0.6	-2.8 ± 0.9
410	6.9 ± 0.6	0.44 ± 0.22	1.3 ± 0.8	4.1 ± 0.9	-3.3 ± 0.6	-2.7 ± 0.7
440	6.1 ± 0.6	0.54 ± 0.22	0.1 ± 0.7	2.7 ± 0.9	-2.9 ± 0.9	-2.5 ± 0.7
470	5.0 ± 0.6	0.69 ± 0.22	-0.3 ± 0.7	1.9 ± 0.9	-2.5 ± 0.9	-2.3 ± 0.7

ここで、 j_1 と h_1 は、正則で連続なベッセル関数である。 η は重心系における π 中間子の運動量で、 z は核子のパラメーターである。そしてまた、この φ と η の関数 $F(z)$ を導入する、

$$F(z) = \frac{\varphi}{\eta} / \left(\frac{\varphi}{\eta} \right)_{\eta=0}$$

この $F(z)$ を用いて、各行列要素を表わすと

$$A_s = \rho g_s; A_{x_0} = \nu^n \eta^2 F^2 g_{x_0}; A_{k_0} = \nu^n \eta^2 \rho F^2 g_{k_0}; A_{d_1} = \eta^2 \rho F g_{d_1} \quad \dots \dots \dots (4.6)$$

となる。ここで、 ν は重心系で、 μc を単位とする光子のモーメントムである；
 $\rho \equiv \frac{\eta}{\nu} \left\{ \left[1 + \nu \frac{\mu}{M} \right] \left[1 + \frac{\mu}{M} \sqrt{1 + \eta^2} \right] \right\}^{-1}$ ； M と μ は核子と π 中間子の質量である； g_{x_0} 、 g_{k_0} と g_{d_1} は定数である。

n と z と定数 g は (4.6) において、未知の量である。これらを決定するために、(4.6) を **Table 3** と比較しなければ、ならない。

$n=0$ と $z = \frac{1}{2}$ の場合に対する係数 g の値は **Table 4** に与えられている。これらの値は、 z が 0 から 1 まで変わるときに、わずかに変化する。

例えば、**Fig. 5** に、 $n=0$ 、 $z = \frac{1}{2}$ 、そして g を **Table 4** から取る場合、(4.6) によって計算された値によって、(4.3) から得られた A^+ 、 B^+ 、 C^+ の値がグラフで記されている。このように、(4.6) のような行列要素のエネルギー依存性がある。

(3) π 中間子のフォトプロダクションによって与えられた、核子のポーラリゼーション。

$I=J = \frac{3}{2}$ 状態における中間子-核子の相互作用システムの“共鳴”についての仮定の正当性は、親中間子によって創られた核子のポーラリゼーションを測ることによって得られる。

核子のポーラリゼーションは次の量で、表わされる
$$P = \frac{d\sigma_+ - d\sigma_-}{d\sigma_+ + d\sigma_-}$$

Table 4. 定数 g の値 ($10^{-30} \text{cm}^2/\text{ster}$)

g_s	16.1 ± 0.6	g_{k_0}	0.41 ± 0.11
g_{x_0}	6.15 ± 0.38	g_{d_1}	1.42 ± 0.37

ここで、 $d\sigma_+$ と $d\sigma_-$ は中間子のフォトプロダクションのトランスバース断面積である。 P に対する表現は次の型をとる、

$$P = \frac{\sin \theta}{\sigma(\theta)} \left\{ 1m \left[E_a^* \left(2M_a \left(\frac{1}{2} \right) + M_q \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} E_q \right) \right] \right. \\ \left. + 3 \ 1m \left[M_a^* \left(\frac{1}{2} \right) \left(M \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} E_q \right) \right] \cos \theta \right\} \dots\dots\dots(4.8)$$

ここで、 $\sigma(\theta)$ は (1.3) で表わされた微分断面積である。

共鳴項のみを保持して、(4.8) の代わりに、次の式を得る、

$$P^+ = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2} \sigma^+(\theta)} (A_S A_{k_0})^+ \left\{ \frac{1}{3} [\sin(\alpha_{33} - \alpha_3) + 2\sin(\alpha_{33} - \alpha_3)] \right\} \dots\dots\dots(4.9)$$

$$P^0 = \frac{\sin \theta}{\sigma^0(\theta)} (A_S A_{k_0})^+ \left\{ \frac{1}{3} [\sin(\alpha_{33} - \alpha_3) - \sin(\alpha_{33} - \alpha_1)] \right\} \dots\dots\dots(4.10)$$

ここで、 A_S と A_{k_0} は (4.2) におけるのと同じである。

$\theta \approx 90^\circ$ に対して、測定は簡単になされる、なぜなら、“非共鳴” 位相の寄与がこの角領域において小さいからである。

$\theta \approx 90^\circ$ のエネルギーに依存する核子のポーラリゼーションの大きさが、**Fig. 6** に書かれている。

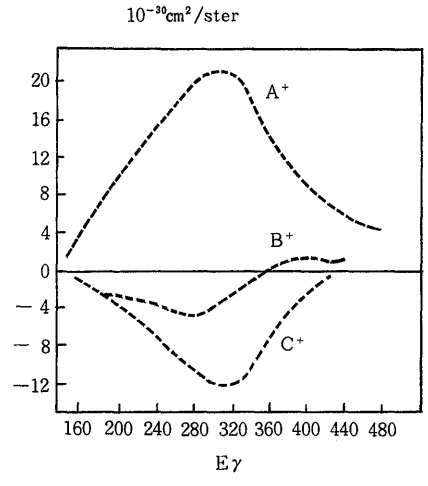


Fig. 5

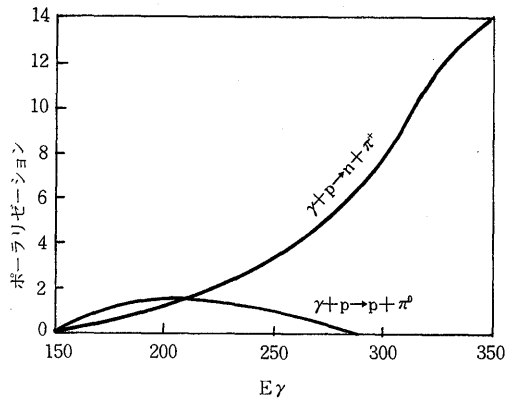


Fig. 6

Summary

PHOTOPRODUCTION AND SCATTERING OF π - MESONS

Michiko Miyamoto

Appreciating N. F. Nelipa's looklet published in 1961, titled "PHOTOPRODUCTION AND SCATTERING OF PI-MESONS", I described this outline.

Here, he got π -meson scattering cross sections in the relation to π -meson photo-production cross sections.