共変微分とゲージ変換

宮　本　道　子

ゲージ変換について知るために，L.D. Faddeev と A.A. Slavnov の著書「Gauge Fields (Introduction to Quantum Theory)」の第一章をまとめてみました。

§1　古典的ヤング・ミルズ場とゲージ理論

Ωをコンパクト半単純（Semisimple）リー群とすると，任意の独立な媒介変数をn個持ち，リー代数の性質を持つこの群は $n\times n$ のエルミート行列で表現される。リー代数のエルミート表現の行列$\mathscr{T}$は n 個の生成元の線型結合によって，次のようにあらわされる，

$$\mathscr{T}=T^a\alpha^a \tag{1}$$

そして生成元 T^a は次の性質を持つ，

$$t_r(T^aT^b)=-2\delta^{ab} \tag{2}$$

$$[T^a,\ T^b]=t^{abc}T^c \tag{3}$$

(3)の t^{abc} は構造定数で，完全に反対称であり，(2)と(3)はコンパクト半単純リー群を実際に特徴ずける性質である。コンパクト半単純群は，もしそれが不変リー部分群を持たないならば，単純と呼ばれる。一般的な半単純群は単純群からつくられる。このことは，エルミート表現におけるリー代数の行列が，それぞれの区画が単純因子の一つに対応する，区画対角形を持つということを意味している。

このような群の最も単純な例は，単純群 $SU(2)$ である。この群の次数は3であり，エルミート表現のリー代数は3×3行列で与えられる。生成元として，行列 T^a は次のように選ばれる，

$$T^1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad T^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\quad T^3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{4}$$

半単純コンパクト群に加えて，可換群（アベーリアン群）$U(1)$ をあつかうが，この $U(1)$ 群の要素は絶対値が1に等しい複素数である。この群のリー代数は1次元で，複素数か実数2×2行列によって構成される。

ヤング・ミルズ場はコンパクト半単純リー群と関連している。これはベクトル場 $\mathscr{A}_\mu(x)$ によって，与えられる。$\mathscr{A}_\mu(x)$ がリー代数のエルミート表現の行列と考えると便利である。この場合，$\mathscr{A}_\mu(x)$ は生成元 T^a の基底に関する係数 $A^a{}_\mu$ によって，定義される

$$\mathscr{A}_\mu(x)=A^a{}_\mu(x)T^a \tag{5}$$

電磁場の場合，ゲージ変換はよく知られたグラディエント変換である，

$$\mathscr{A}_\mu(x) \longrightarrow \mathscr{A}_\mu(x) + i\partial_\mu\lambda(x) \tag{6}$$

又，電磁場は，複素函数 $\psi(x)$ で表現される荷電場と相互作用する。運動方程式において，場 $\mathscr{A}_\mu(x)$ は次の形であらわれる，

$$\nabla_\mu\psi = (\partial_\mu - \mathscr{A}_\mu)\psi \tag{7}$$

もし $\psi(x)$ が次の規則に従って変換するならば，

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\lambda(x)}\psi(x)$$
$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow e^{-i\lambda(x)}\bar{\psi}(x) \tag{8}$$

$\nabla_\mu\psi$ も同じように変換して，$e^{i\lambda(x)}\nabla_\mu\psi$ となる。なぜならば，

$$(\partial_\mu - \mathscr{A}_\mu)\psi \longrightarrow [\partial_\mu - i\partial_\mu\lambda(x) - \mathscr{A}_\mu(x)]e^{i\lambda(x)}\psi(x) = e^{i\lambda(x)}[\partial_\mu - \mathscr{A}_\mu(x)]\psi(x) \tag{9}$$

となるからである。すなわち，$\psi(x)$ と $\mathscr{A}_\mu(x)$ のペアーが解であるならば，$e^{i\lambda(x)}\psi(x)$ と $\mathscr{A}_\mu(x) + i\partial_\mu\lambda(x)$ のペアーも又解となる。このことを，他の言葉で言えば，荷電空間の座標と考えられる場 $\psi(x)$ の位相の局所変化は，付加的な電磁場のあらわれと同等である。

より複雑な荷電空間の場合に対するこの原理の一般化は，ヤング・ミルズ理論を導びいた。そのような内部空間の例は，ハドロン等のアイソトピック空間や，ユニタリー・スピン空間等である。これらの空間において，座標と考えられる場 $\psi(x)$ に対する運動方程式は，共変微分 $\nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma(\mathscr{A}_\mu)$ を含む。ここで $\Gamma(\mathscr{A}_\mu)$ は群 Ω の与えられた表現に対応する，$\mathscr{A}_\mu$ の行列表現である。例えばもし $\Omega = SU(2)$ で荷電空間が2次元表現に対応するならば，(5) における生成元 T^a がパウリの行列によって次のように表現される，

$$\Gamma(T^a) = \frac{1}{2i}\tau^a \tag{10}$$

ここで，

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

そしてこの場合，

$$\Gamma(\mathscr{A}_\mu) = \frac{1}{2i}A^a{}_\mu\tau^a \tag{12}$$

である。

電磁場の局所変換に類似して，場 $\psi(x)$ の変換は次の形を持つ

$$\psi(x) \longrightarrow \psi^\omega(x) = \Gamma(\omega(x))\psi(x) \tag{13}$$

ここで，$\omega(x)$ は群 Ω の中にその値をもつ x の函数である。$\omega(x)$ が群 Ω のエルミート表現による行列であると考えると便利である。共変微分 $\nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma(\mathscr{A}_\mu)$ はもし場 $\mathscr{A}_\mu(x)$ が次の規則に従って変換するならば，

$$\mathscr{A}_\mu(x) \longrightarrow \mathscr{A}_\mu{}^\omega(x) = \omega(x)\mathscr{A}_\mu(x)\omega^{-1}(x) + \partial_\mu\omega(x)\omega^{-1}(\omega) \tag{14}$$

$\nabla_\mu\psi \longrightarrow \nabla_\mu{}^\omega\psi^\omega = \Gamma(\omega(x))\nabla_\mu\psi$ のように変換される。変換(14)が群の規則に従っていることを見るのはむつかしいことではない。これらの変換の集合は次の式であらわされる群を構成する，

$$\tilde{\Omega} = \prod_x \Omega \tag{15}$$

ときには，ゲージ変換の無限小の形を用いると便利なことがある。$\omega(x)$ が1から無限小だけずれているものとすると，

$$\omega(x)=1+\alpha(x)=1+\alpha^a(x)T^a \tag{16}$$

(16)の変換での $\mathscr{A}_\mu$ の変化は，次のようになる

$$\delta\mathscr{A}_\mu=\partial_\mu\alpha-[\mathscr{A}_\mu,\ \alpha]=\nabla_\mu\alpha \tag{17}$$

そして成分に関して，

$$\delta A_\mu{}^a=\partial_\mu\alpha^a-t^{abc}A_\mu{}^b\alpha^c \tag{18}$$

ψ に対する変換は次の形になる，

$$\delta\psi=\Gamma(\alpha)\psi \tag{19}$$

このように $\delta\mathscr{A}_\mu$ の群が，ゲージ群の特殊な場合であることはあきらかである。共変微分の存在は，内部空間での相対性原理を力学的に実現することを可能にする。すなわち $\psi(x)$，$\mathscr{A}_\mu(x)$ の配位場は $\Gamma(\omega(x))\psi(x)$，$\mathscr{A}_\mu{}^\omega(x)$ と同じ物理状態を記述する。もし我々がこの原理を力学を構成する基礎と考えるならば，機械的にヤング・ミルズ理論に行きつく。

相対性原理は１つの場の集合を意味するばかりでなく，真の物理的配位に対応するゲージ同等配位のあらゆる集合を意味する。もっとはっきりさせるために，この原理は内部荷電空間内に場ψがその基底に関して成分 $\psi=(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3\cdots\cdots,\ \psi_n)$ と表現される，そのような特殊な固定された基底はないという原理を暗示している。そのような基底はそれぞれの時空点において導入されうる。しかしながらその場所を定める物理的な理由はない。基底の局所的変化は，重力場や電磁場の役割と類似の役割をするゲージ場の変化として説明される。

相対性原理は，例えば自己相互作用スカラー場のようなより慣例的な場による力学の記述に比べて，ゲージ場による力学の記述の中に，見落すことの出来ない形式的な相違を招く。同等な配位空間で計算するために，なんとかして媒介変数化されなければならない。すなわちそれぞれの集合において独特の代表が選ばれなければならない。いつもゲージ自由度を除く補助条件を押しつけることによって，これはなされる。この補助条件はゲージ条件又は単にゲージと呼ばれる。最もよく使われるゲージは次の条件である，

$$\begin{aligned}
&\phi_L\equiv\partial_\mu\mathscr{A}_\mu=0 \quad (\text{ローレンツゲージ})\\
&\phi_C\equiv\partial_k\mathscr{A}_k=0 \quad (\text{クーロンゲージ})\\
&\phi_H\equiv\mathscr{A}_0=0 \quad (\text{ハミルトンゲージ})\\
&\phi_A\equiv\mathscr{A}_3=0 \quad (\text{アクシアルゲージ})
\end{aligned} \tag{20}$$

一般的にゲージ条件 $\phi(\mathscr{A},\ \psi\,;x)$は$\mathscr{A}$ と ψ の汎函数の族であり，それぞれxに対する汎函数である。固定された x に対して $\phi(\mathscr{A},\ \psi\,;x)$ は群 G のリー代数の要素であるので，独立なゲージ条件の数はゲージ群の次元と一致する。

さて，我々はゲージ条件によって満されるべき要求を議論しよう。最も重要なものは方程式の系

$$\phi(\mathscr{A}^\omega,\ \psi^\omega\,;x)=0 \tag{21}$$

が固定された $\mathscr{A}_\mu$ と ψ に対して唯一つの解 $\omega(x)$ を持つことであることを意味している。この要求はそれぞれの同等の場の集合の中に，実際に(21)の条件を満す $\mathscr{A}_\mu$，ψ 場の組が唯一つ存在することを意味する。この組は真の物理的配位を唯一に特徴ずける集合の代表と考えられ

る。実際に重要ではあるが，より基礎的ではない他の要求は(21)の方程式が少なくとも摂動論のわく内で，そんなに複雑ではなく十分に明確な解 $\omega(x)$ を与えるべきであるということである。

方程式(21)は $\omega(x)$ に対して非線型方程式の系である。局所ゲージ条件に対して，それは偏微分方程式の非線型の系である。例えば，ローレンツ・ゲージに対して，この方程式は次の形をとる，

$$\nabla_\mu L_\mu=\partial_\mu L_\mu-[\mathscr{A}_\mu,\ L_\mu]=-\partial_\mu\mathscr{A}_\mu \tag{22}$$

$$L_\mu=\omega^{-1}\partial_\mu\omega$$

そして小さな $\mathscr{A}_\mu$ と $\alpha(x)$ に対してこれは次のように書き直される，

$$\Box\alpha-[\mathscr{A}_\mu,\ \partial_\mu\alpha]+\cdots\cdots\cdots=-\partial_\mu\mathscr{A}_\mu \tag{23}$$

ここで，あとにつづくドットは α についてのより高次の項をあらわす。

方程式(23)が解かれるために必要な条件は，対応するヤコビアンの非縮退性である。無限小ゲージ変換 α のもとにおけるゲージ条件の変分は α に作用する線型オペレーター M_ϕ によって定義される

$$M_\phi\alpha=\int\Big[\frac{\delta\phi(\mathscr{A},\ \psi\,;\,x)}{\delta\mathscr{A}_\mu(y)}(\partial_\mu\alpha(y)-[\mathscr{A}_\mu(y),\ \alpha(y)])$$
$$+\frac{\delta\phi(\mathscr{A},\ \psi\,;\,x)}{\delta\psi(y)}\Gamma(\alpha(y))\psi(y)\Big]dy \tag{24}$$

このオペレーターは，(21)の条件に対して，ヤコビアン行列の役割を演ずる。オペレーター M_ϕ の非縮退性

$$\det M_\phi\neq 0 \tag{25}$$

は系(21)に対して唯一つの解が存在するための必要条件である。

局所ゲージ条件に対して，M_ϕ は系(23)を線型にするときに得られる微分オペレーターである。例えばローレンツゲージ条件の場合に，$M_{\phi L}=M_L$ は次の形を持つ

$$M_L\alpha=\Box\alpha-\partial_\mu[\mathscr{A}_\mu,\ \alpha]$$

§2　ヤング・ミルズ場の幾何学的説明

$r(s)$ は次の方程式によって決定される時空の中の曲線である

$$x_\mu=x_\mu(s) \tag{26}$$

ベクトル場 $\psi(x)$ は次の成分で，

$$X_\mu=\frac{dx_\mu}{ds} \tag{27}$$

それぞれの点でカーブ $r(s)$ に接している。もしそれぞれの曲線の点で接線方向の共変微分がゼロであるならば，

$$\nabla_\mu\psi(x)\,|_{x=x(s)}X_\mu=0 \tag{28}$$

場 $\psi(x)$ は $r(s)$ にそって，平行移動を受けるという。

一般的にいえば，閉じられた曲線にそう平行移動は場 $\psi(x)$ を変える。さて無限小曲線に対

するこの変化を計算しよう。次のような頂点を持つ平行四辺形を x が描くものとする，

$$(x,\ x+\varDelta_1 x,\ x+\varDelta_1 x+\varDelta_2 x,\ x+\varDelta_2 x) \tag{29}$$

もしこの平行四辺形にそう共変微分がゼロであるならば，この閉じられた線のまわりの $\phi(x)$ の総変化は次のようになる，

$$\varDelta_{12}\phi(x)=\Gamma(\mathscr{F}_{\mu\nu})\phi(\varDelta_1 x_\mu \varDelta_2 x_\nu-\varDelta_1 x_\nu \varDelta_2 x_\mu) \tag{30}$$

ここで，

$$\mathscr{F}_{\mu\nu}=\partial_\nu \mathscr{A}_\mu-\partial_\mu \mathscr{A}_\nu+[\mathscr{A}_\mu,\ \mathscr{A}_\nu] \tag{31}$$

もちろん，$(x,\ x+\varDelta_1 x)$ にそう共変微分はゼロだから，第1の辺にそう x の変化に対応する $\phi(x)$ の変化は

$$\varDelta_1\phi(x)=\phi(x+\varDelta_1 x)-\phi(x)=\partial_\mu\phi\varDelta_1 x_\mu=\Gamma(\mathscr{A}_\mu)\phi(x)\varDelta_1 x_\mu \tag{32}$$

残りの平行四辺形の辺に対する類似の計算をし，$\mathscr{A}_\mu$ についての $\Gamma(\mathscr{A}_\mu)$ の線型従属と，

$$[\Gamma(\mathscr{A}_\mu),\ \Gamma(\mathscr{A}_\nu)]=\Gamma([\mathscr{A}_\mu,\ \mathscr{A}_\nu])$$

という事実を考慮に入れて，我々は $\phi(x)$ における線変化に対する(30)式を得る。この公式は $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ を荷電空間の曲率と呼ぶことが自然であることを示している。

次にヤング・ミルズ場の古典力学について2，3述べよう。ゲージ不変なラグランジアンをアベーリアン群 $U(1)$ の場合に，電磁場のラグランジアンに対応して構成することである，

$$\mathscr{L}=\frac{1}{4e^2}\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}+\mathscr{L}_M(\phi,\ \nabla_\mu\phi) \tag{33}$$

ここで $\mathscr{L}_M$ は場 $\mathscr{A}_\mu(x)$ と $\phi(x)$ のゲージ不変相互作用を記述し，場 ϕ のフリー・ラグランジアンから普通の微分を共変微分でおきかえることによって演繹され，e は電荷の役割をする。このラグランジアンはもし次のように場の規格を変えるならば，

$$\mathscr{A}_\mu(x)\longrightarrow e\mathscr{A}_\mu \tag{34}$$

より親しみやすい形に書きかえられる。この場合，e^{-2} というファクターは(33)の第1項から消え，そしてその代わりに共変微分の中にあらわれる，

$$\nabla_\mu\longrightarrow\partial_\mu-e\mathscr{A}_\mu \tag{35}$$

以下において，我々は特にことわらないで，(34)と(35)の規格化を用いることにする。

単純非アベーリアン・ゲージ群の場合に対して(33)の一般化は次のようになる，

$$\mathscr{L}=\frac{1}{8g^2}t_r\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}+\mathscr{L}_M(\phi,\ \nabla_\mu\phi) \tag{36}$$

第1項を書き直すと

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}{}^a F_{\mu\nu}{}^a \tag{37}$$

ここで，$F_{\mu\nu}{}^a(x)$ は基底 T^a に関する行列 $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ の成分である。あきらかにこのラグランジアンは，ゲージ変換(13)，(14)に関して不変である。一般形の半単純群の場合ラグランジアンは r 個の任意のコンスタント g_i，$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,\ r$ を含む。ここで r は不変単純ファクターの数であり，(37)に類似した式は次の形を取る

$$\mathscr{L}=\sum_i-\frac{1}{4g_i{}^2}F_{\mu\nu}{}^{a_i}F_{\mu\nu}{}^{a_i} \tag{38}$$

ここで i は単純因子のインデックスの数である。

電磁場に対して，真空におけるヤング・ミルズ場のラグランジアン(37)は場の中での2次の

項に加えてより高次の項を含む。これはヤング・ミルズ場が小さくない自己相互作用を持つことを意味している。言いかえれば，ヤング・ミルズ場自身の量子が電荷を持ち，それら量子が荷電の相互作用を伝えるのである。主として，特殊なヤング・ミルズ場力学の特徴はこの自己作用に関係している。

真空中のヤング・ミルズ場に対するラグランジアン(37)から生じた運動方程式は次の形を持つ

$$\nabla_\mu \mathscr{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathscr{F}_{\mu\nu} - [\mathscr{A}_\mu, \ \mathscr{F}_{\mu\nu}] = 0$$

そしてこれを $\mathscr{A}_\mu$ で書くと

$$\Box \mathscr{A}_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \mathscr{A}_\mu + [\mathscr{A}_\mu, \ (\partial_\nu \mathscr{A}_\mu - \partial_\mu \mathscr{A}_\nu + [\mathscr{A}_\mu, \ \mathscr{A}_\nu])] - \partial_\mu [\mathscr{A}_\mu, \ \mathscr{A}_\nu] = 0$$

となる。

§3　ゲージ場の力学的モデル

スピノール場とヤング・ミルズ場の相互作用を記述するラグランジアンは最も簡単なものである。スピノール場 $\psi_k(x)$ の多重項で，単純コンパクト・ゲージ群 Ω の表現 $\Gamma(\omega)$ を実現しよう。ラグランジアンは次の形をもつ

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{YM} + i\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \nabla_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{39}$$

$\mathscr{L}_{YM}$ は真空におけるヤング・ミルズ場のラグランジアンで

$$\mathscr{L}_{YM} = \frac{1}{8g^2} t_r \mathscr{F}_{\mu\nu} \mathscr{F}_{\mu\nu} \tag{40}$$

となる。

2つのスピノールのスカラー積において，インデックスは内部自由度に対応するが，例えば質量項は次のように書ける

$$m\bar{\psi}(x)\psi(x) = m\bar{\psi}_k(x)\psi_k(x) \tag{41}$$

さらに，

$$(\nabla_\mu \psi(x))_k = \partial_\mu \psi_k(x) - (\Gamma(\mathscr{A}_\mu(x)))_{kl} \psi_l(x) \tag{42}$$

ここで $(\Gamma(\mathscr{A}_\mu))_{kl} = A_\mu{}^a (\Gamma(T^a))_{kl}$ であり，行列 $(\Gamma(T^a))_{kl}$ は簡単に $\Gamma^a{}_{kl}$ とこれから書かれるが，これは場 $\psi(x)$ によって実現される T^a の表現行列である。そこで

$$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \nabla_\mu \psi(x) = \bar{\psi}_k(x)\gamma_\mu(\partial_\mu \psi_k(x) - A_\mu{}^a(x)\Gamma^a{}_{kl}\psi_l(x)) \tag{43}$$

となる。

例えばゲージ群を $\Omega = SU(2)$ とし，場 $\psi(x)$ がこの群の基本的表現を実現する。そこで，

$$(\Gamma(\mathscr{A}_\mu))_{kl} = -\frac{1}{2} A_\mu{}^a (\tau^a)_{kl} \tag{44}$$

τ^a はパウリの行列で，完全ラグランジアンは次の形を持つ

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4g^2}(\partial_\nu A_\mu{}^a - \partial_\mu A_\nu{}^a + \varepsilon^{abc} A_\mu{}^b A_\nu{}^c)^2$$
$$+ i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu \psi + \frac{i}{2} A_\mu{}^a \tau^a \psi) - m\bar{\psi}\psi \tag{45}$$

ゲージ群が $SU(3)$ の場合，そしてスピノール $\psi(x)$ がその基本的表現を実現する場合，ラグ

ラジアンは次の形を取る

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4g^2}(\partial_\nu A_\mu{}^a-\partial_\mu A_\nu{}^a+f^{abc}A_\mu{}^b A_\nu{}^c)^2$$
$$+i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu\psi+\frac{i}{2}A_\mu{}^a\lambda^a\psi)-m\bar{\psi}\psi \tag{46}$$

ここで f^{abc} は群 $SU(3)$ の構造定数，λ^a はよく知られたゲルマンの行列である

$$\lambda^1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\lambda^4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \tag{47}$$
$$\lambda^7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\quad \lambda^8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

場のくりこみは

$$A_\mu{}^a(x)\longrightarrow gA_\mu{}^a(x) \tag{48}$$

のようにし，ラグランジアン(45)，(46)をより親しみやすい形に変える。この時 g は相互作用の項のみに含まれる。

例えば後のラグランジアンは強い相互作用の理論に用いられる。この場合スピノール場はコーク場であり，ヤング・ミルズ場は“グルーオン”と呼ばれる。そして内部空間はカラー空間と呼ばれる。

次にヤング・ミルズ場のスカラー場との相互作用を考えると，そのゲージ不変なラグランジアンは次の形をもつ

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{YM}+\frac{1}{2}\nabla_\mu\varphi\nabla_\mu\varphi-\frac{m^2}{2}\varphi\varphi-V(\varphi) \tag{49}$$

ここで共変微分は次のようである

$$\nabla_\mu\varphi=\partial_\mu\varphi-\Gamma(\mathscr{A}_\mu)\varphi \tag{50}$$

この場合 $\Omega=SU(2)$ と場 φ がエルミート表現 $\varphi=\varphi^a$，$a=1, 2, 3$ を実現するとき，対応する式は次のようになる

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{YM}+\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi^a-g\varepsilon^{abc}A_\mu{}^b\varphi^c)^2-\frac{m^2}{2}\varphi^a\varphi^a-\lambda^2(\varphi^a\varphi^a)^2 \tag{51}$$

ここで，媒介変数mと λ^2 は質量の役割とスカラー場との相互作用定数の役割を演ずる。ラグランジアン(51)それ自身は，あきらかに物理的応用の観点からはほとんど興味がない。しかしながら意味がないとみえる変形が，ヤング・ミルズ理論のわく内で，質量を持ったベクトル場を記述する極端に興味深い可能性をみちびく。このベクトル場の，質量発生の機能はヒッグズ効果と呼ばれる。

つづけてゲージ群 $SU(2)$ を例としてあつかう。はじめに，スカラー場がエルミート表現に属する場合を考えてみよう。我々は次のラグランジアンを用いる

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{YM}+\frac{1}{2}(\nabla_\mu\varphi^a)^2-\lambda^2(\varphi^a\varphi^a-\mu^2)^2 \tag{52}$$

このラグランジアンは(51)とは $-\lambda^2\mu^4$ の定数項と φ の2乗の項の符号がちがう。一見したところラグランジアン(52)は虚数の質量を持つ粒子を記述しているようにみえ，そしてそれ故物理的意味は持たないようにみえる。しかし，そのような結論は急ぎすぎである。φ の2乗の項はもし $\varphi=0$ がポテンシャル・エネルギーの最小となる安定な平衡である場合にのみ質量の役目をする。

ポテンシャル・エネルギーは
$$U(A_\mu,\ \varphi)=\int\Big[\frac{1}{4g^2}F_{ik}{}^aF_{ik}{}^a+\frac{1}{2}\nabla_i\varphi^a\nabla_i\varphi^a+\lambda^2(\varphi^a\varphi^a-\mu^2)^2\Big]d^3x \qquad (53)$$

であり，$\varphi^a=0$, $A_\mu{}^a=0$ という配位は鞍点である。そして対応する平衡は不安定である。しかしながら安定な平衡点も存在し，それらは $A_\mu{}^a=0$ で $\varphi=\text{constant}$ で，$\varphi^2=\mu^2$ という定まった長さを持つ配位に対応する。このような $A_\mu{}^a$ と φ はポテンシャル・エネルギーをつくっているすべての3つの正の項をゼロにする。

実際の質量の決定のために，真の最小のまわりにポテンシャル・エネルギーをテーラー展開することが必要である。この場合，平衡点は縮退している。そして極小配位はコンスタントベクトル φ の方向に対応する点で2次元区域 S^2 をかたちずくる。これらの方向を $\boldsymbol{n}$ で示し，対応する φ を添字 n で書くと，

$$\boldsymbol{\varphi}_n=\mu\boldsymbol{n}$$

となる。もし我々が配位空間を減少し，大きい $|x|$ で φ_n の一つと漸近的に一致する場 φ のみを考慮に入れるならば，縮退は取り除かれる。そのような選択は自然に定まった媒介変数での $SU(2)$ 不変性をこわす。この条件は力学に矛盾しないし，他の φ_n の選択に対応する理論は物理的に同等であるということが示される。

明確にするために，ベクトル $\boldsymbol{n}$ を3番目の軸にそって方向ずけられるように選ぼう，$\boldsymbol{n}=(0,\ 0,\ 1)$。対応するベクトル φ_n は $(0,\ 0,\ \mu)$ である。

無限大でゼロになる漸近線を持つ場 $\varphi(x)$ の変換は

$$\varphi(x)\longrightarrow\boldsymbol{\varphi}_n+\varphi(x) \qquad (54)$$

アイソトピック対称性の破れを明確にし，ラグランジアンは次の形を取る

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=\mathscr{L}_{YM}&+\frac{1}{2}(\nabla_\mu\varphi^a)^2+\frac{m_1{}^2}{2}[(A_\mu{}^1)^2+(A_\mu{}^2)^2]\\&+m_1(A_\mu{}^1\partial_\mu\varphi^2-A_\mu{}^2\partial_\mu\varphi^1)+gm_1[\varphi^3\{(A_\mu{}^1)^2+(A_\mu{}^2)^2\}\\&-A_\mu{}^3\{\varphi^1A_\mu{}^1+\varphi^2A_\mu{}^2\}]-\frac{m_2{}^2}{2}(\varphi^3)^2-\frac{m_2{}^2g}{2m_1}\varphi^3(\varphi^a)^2\\&-\frac{m_2{}^2g}{8m_1{}^2}(\varphi^a\varphi^a)^2\\&m_1=\mu g \qquad m_2=2\sqrt{2}\lambda\mu\end{aligned} \qquad (55)$$

我々はあきらかにアイソトピック不変性を破ったが，ラグランジアンと境界条件は無限大で1になる函数 $\omega(x)$ での局所ゲージ変換のもとに不変である。新しい変数におけるゲージ変換のはっきりとした形を与え，無限小変換にかぎるものとすると，

$$\delta\varphi^a(x)=-g\varepsilon^{abc}\varphi^b(x)\alpha^c(x)-m_1\varepsilon^{abc}\alpha^c(x) \qquad (56)$$

ラグランジアン(55)によって発生した質量スペクトルを分析するために，場 $\mathscr{A}_\mu(x)$, $\varphi(x)$

のゲージ同等な群の中の代表を選びゲージ条件を定めなければならない。ここでは次のゲージ条件をえらぶのが便利である,

$$\varphi^1(x)=0, \quad \varphi^2(x)=0, \quad \partial_\mu A_\mu{}^3(x)=0 \tag{57}$$

十分に小さな $\varphi^3(x)$ に対して認容出来る条件が満されるということが証明される。実際に

$$\delta(\partial_\mu A_\mu{}^3)=\Box\alpha^3-g\varepsilon^{abc}\partial_\mu[A_\mu{}^b, \ \alpha^c] \tag{58}$$

そして $\varphi^{1,2}$ は(56)によって決定される。結果として我々のゲージに対応するオペレーターMは次の形を持つ。

$$M\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -g\varphi^3-m_1 & g\varphi^2\\ -g\varphi^3-m_1 & 0 & -g\varphi^1\\ \partial_\mu A_\mu{}^2+A_\mu{}^2\partial_\mu & -A_\mu{}^1\partial_\mu-\partial_\mu A_\mu{}^1 & \Box\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \tag{59}$$

そして,

$$\det M=m_1{}^2\det\Box+0(\varphi) \tag{60}$$

第1項がゼロではないので,摂動論のわくの中で,$M\neq 0$ と(57)の条件が満される。

質量スペクトルを決定するために,2乗の形に明確に書く

$$\mathscr{L}_0=-\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu{}^a-\partial_\mu A_\nu{}^a)^2+\frac{m_1{}^2}{2}((A_\mu{}^1)^2+(A_\mu{}^2)^2)$$
$$+\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^3\partial_\mu\varphi^3-\frac{m_2{}^2}{2}(\varphi^3)^2 \tag{61}$$

古典力学における我々の理論は,2つの質量を持ったベクトル場,1つの質量のないベクトル場そして1つの質量をもったスカラー粒子を記述する。ゆえにすべての3つのベクトル場がゼロではない質量を獲得する $SU(2)$ ゲージ不変モデルを構成することはむつかしいことではない。このために2次元(スピノール)表現における複素スカラー場をためしてみることが必要である

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} \qquad \varphi^\dagger=(\varphi_1{}^*, \ \varphi_2{}^*) \tag{62}$$

ゲージ不変なラグランジアンは次の形をもつ

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{YM}+(\nabla_\mu\varphi)^\dagger\nabla_\mu\varphi-\lambda^2(\varphi^\dagger\varphi^\dagger-\mu^2)^2 \tag{63}$$

ここで

$$\nabla_\mu\varphi=\partial_\mu\varphi+\frac{i}{2}g\tau^a A_\mu{}^a\varphi \tag{64}$$

そして場 φ のゲージ変換は次の式で与えられる

$$\delta\varphi(x)=\frac{1}{2i}g\tau^a\alpha^a(x)\varphi(x) \tag{65}$$

前の場合と同様に,安定な最極端は定数 φ に対応し,

$$\varphi^\dagger\varphi=\mu^2 \tag{66}$$

で与えられる。縮退を取り除くために,我々は最小値を次のように選択する

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}0\\ \mu\end{pmatrix} \tag{67}$$

又次のようにゲージを取ることができる。

$$\varphi_1(x)=0 \qquad Im\varphi_2(x)=0 \tag{68}$$

このゲージにおいて,1つのスカラー場のみが残されている,

$$Re\varphi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma(x) \tag{69}$$

$$\sigma \longrightarrow \sqrt{2}\mu+\sigma(x) \tag{70}$$

という変換をすると，次のラグランジアンを得る

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^{a}F_{\mu\nu}{}^{a}+\frac{m_1{}^2}{2}A_\mu{}^a A_\mu{}^a+\frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial_\mu\sigma-\frac{1}{2}m_2{}^2\sigma^2\\&+\frac{1}{2}m_1 g\sigma A_\mu{}^a A_\mu{}^a+\frac{g^2}{8}\sigma^2 A_\mu{}^a A_\mu{}^a-\frac{gm_2{}^2}{4m_1}\sigma^3-\frac{g^2m_2{}^2}{32m_1{}^2}\sigma^4\\&m_1=\frac{\mu g}{\sqrt{2}}\qquad m_2=2\lambda\mu\end{aligned} \tag{71}$$

これは３つの質量のあるベクトル場と１つの質量のあるスカラー場の相互作用を記述する。

参考文献(reference)

1. L.D. Faddeev, A.A. Slavnov "Gauge Fields" (Introduction to Quantum Theory) The Benjamin Cummings Publishing Company
2. ウィグナー著，森田正人，森田玲子訳「群論と量子力学」吉岡書店
3. 山内恭彦，内山龍雄，中野重夫著　「一般相対性および重力の理論」　裳華房
4. 数理科学　1982年６月号「ゲージ理論」
5. 武田　暁，宮沢弘成著　「素粒子物理学」　裳華房

原稿受理　1982年11月29日