「実験に便利なハミルトニアンの変形について」

宮　本　道　子

ALLAN J. LICHTENBERG 著「PHASE-SPACE DYNAMICS OF PARTICLES」の位相空間の紹介のところをまとめてみました。

§1　位相空間における粒子の運動

$3n$ 個の自由度を持っている n 個の運動方程式を考えてみる。ハミルトニアンの存在は，正準表現において $6n$ 個の運動方程式を導びき，それらは次のように書かれる

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\end{aligned}\qquad(1)$$

ここで，$H=H(p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_{3n},\ q_1,\ q_2\cdots\cdots q_{3n},\ t)$であり，ドットは時間微分を表わす。

もし我々が外力の影響を受けない，時間に独立なポテンシャルの中を動いている粒子の場合を考え，q_i を直角座標系の位置座標，そして p_i を対応する運動量として取ると，H は全エネルギーすなわち粒子の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和であり，運動の定数であり，かつ時間をあらわな変数として含まない。

(1) に関して位置と運動量の初期値である $6n$ 個の定数がある。これらはその後の粒子の運動を一意的に決定する。この運動をあきらかにするために，より単純な系を考え，この単純な系において (1) の型のそれぞれの方程式のペアーは，他のすべてのそのような方程式のペアーからは独立である。これは粒子間の相互作用がないという仮定と同等であり，3つの空間次元の各々の運動は他の2つとは独立であるという仮定にひとしい。この条件に対して，空間次元における各々の粒子の運動は，位置と運動量の初期値である2つの運動定数に関連しており，運動は次の方程式のペアーによって表わされる

$$\begin{aligned}P(p,\ q,\ t) &= p_1\\ Q(p,\ q,\ t) &= q_1\end{aligned}\qquad(2)$$

これらは原理的に p，q に時間と初期値 p_1，q_1 によって表わされる解を与える。我々が(2)を p，q が時間の函数であるとして解いたとしよう。p，q 座標軸を持つ2次元空間において，初期時間 t_1 に対する i 個のそれぞれの粒子の初期座標 p_{i1} と q_{i1} から n 個の粒子の軌跡を，1つの空間次元の運動に対してある時間 t_2 まで描くことができる。我々はこの p-q 空間を粒子の位相空間と呼んでいる。そして3つの代表する粒子の軌跡は **Fig. 1** に示されている。この2

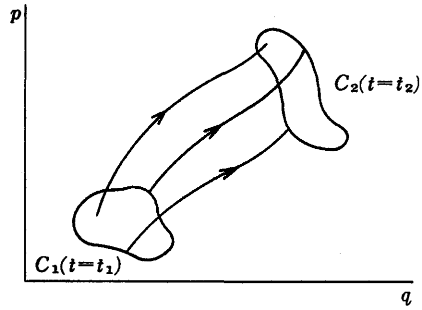

Fig. 1

つの位相空間についての重要な性質を次に示そう。

1. 位相空間の２つの軌跡は，与えられた同時刻に同じ位相点を通らない。

これは初期条件と時間が一意的に後に続く運動を決定することからあきらかである。

2. 位相空間における境界 c_1，これは時刻 t_1 に粒子の集合を境界し，時刻 t_2 に同じ粒子の集合を境界する境界 c_2 に移る。

この２番目の性質は第１の性質の結果として当然である。なぜなら境界の中のいかなる粒子も境界に近ずくとき，境界粒子として後に続く運動に対する同じ初期条件を持たねばならない。そしてそれ故境界粒子とともに一意的に移動する。

簡単な例で２番目の性質を説明してみよう。私達はマトリックスを次のように作り，相互作用しない２次元位相空間の粒子の集合を変換する。そしてこれは粒子の一般的ドリフト運動に垂直な単一自由度を持つ運動に対応する

$$\begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L}{v_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p_1}{m} \\ q_1 \end{pmatrix}$$

垂直運動量 (p_1) は力を受けないドリフト領域で変化せずに残される。一方，垂直位置 (q_1) はドリフト時間 $\frac{L}{v_0}$ に垂直速度 $\frac{p_1}{m}$ をかけただけ増加する。ここで L はドリフト長さそして v_0 はドリフト速度である。もし粒子が初期的に **Fig. 2** (a) の長方形 abcd によって境界される垂直位相空間にあるならば，ドリフトの後各々の粒子の q 位置は初期値 p に比例して移動し，長方形を **Fig. 2** (b) の平行四辺形に変換する。

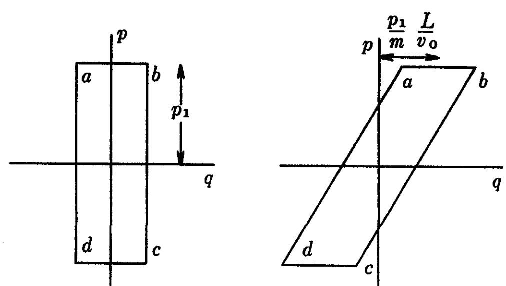

Fig. 2

先の議論の中に我々がその中に粒子の座標が見出される領域として，粒子の集合によって満された位相空間をあつかってきたが，位相空間の他の解釈がある。もし単一粒子の初期座標が知られていないならば，実際の座標について知られた情報を最もよく近似する初期座標の確率を与えるために配分される粒子の可能な初期座標の集合を考えることができる。確率の配分は実際の初期座標が空間の中のどこかにあるという事実を反映して，いつも位相空間全体について積分すると，1になるように規格化されている。

§2　運動方程式のハミルトン形式

我々は今，単一自由度を持つ粒子の運動を吟味してみよう。運動方程式は最も一般的に次の型に書かれる

$$\begin{aligned}\dot{p}&=-F(p,\ q,\ t)\\ \dot{q}&=G(p,\ q,\ t)\end{aligned} \qquad (3)$$

大部分の問題において，力は p に独立であり，速度 $\dot{q}$ は q に独立である。もし我々がある平衡位置についての振動に興味をいだくならば，よりいっそうの簡単化が可能である。もし平衡からのずれが十分に小さければ G は

$$G(p,\ q,\ t)=G(t)\,p$$

のようになり，(3) は次のように書ける

$$\begin{aligned}\dot{p}&=-F(p,\ q,\ t)\\ \dot{q}&=G(t)p\end{aligned} \qquad (4)$$

(4)と(1)を比べると，F と G が次の関係から決定されるので，(4)はハミルトニアンから得られるということがわかる

$$-F(q,\ t)=-\frac{\partial H}{\partial q} \qquad (5)$$

$$G(t)p=\frac{\partial H}{\partial p} \qquad (6)$$

(5)と(6)を p と q について積分すると

$$H=\int F(q,\ t)\,dq+g(p,\ t) \qquad (7)$$

$$H=\frac{G(t)}{2}p^2+f(q,\ t) \qquad (8)$$

を得る。ここで $f(q,\ t)$ と $g(p,\ t)$ は積分定数である。(7) と (8) の H は同じであるから，2つの方程式は互いに他の積分定数を決定して

$$H=\frac{G(t)}{2}p^2+\int F(q,\ t)dq \qquad (9)$$

を得る。この一般的な場合において，H は運動定数ではない。そして粒子の位相空間での軌跡は時間には独立に明記され得ない。もし一方，F と G が時間の関数ではないならば，我々は初期値の座標 p_0 と q_0 にのみ依存する時間に独立なハミルトニアンを得る

$$\frac{G}{2}p^2+\int F(q)dq=H(p_0,\ q_0) \qquad (10)$$

q のある値に対してモーメンタム p は時間に独立に決定される。もし $q>0$ に対して $F>0$ で

$q<0$ に対して $F<0$ ならば，我々はその中で定数ハミルトニアンの曲線が閉じているような振動系を持つ。もし初期条件が与えられたならば，位置と運動量の最大のずれが知られる。

定数ハミルトニアンを持ち，１つの自由度を持つ系に対して，我々は運動方程式の公式の解を得る。ハミルトンの方程式(1)の２番目から，

$$dt=\frac{dq}{\partial H/\partial p} \tag{11}$$

$$t=\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\partial H/\partial p} \tag{12}$$

を得る。$\dfrac{\partial H}{\partial p}$ は p と q のみの関数で，p と q は(10)によって関係ずけられているので，私達は運動方程式を求積法にした。求積法は時には数値で計算される。そしてそのような場合，解析的な解の重要さは減少される。

我々は今，２個以上の自由度を持つ系について考えてみると，方程式(11)は一般化される

$$dt=\frac{dq_1}{\partial H/\partial p_1}=\frac{dq_2}{\partial H/\partial p_2}=\cdots\cdots=\frac{dq_n}{\partial H/\partial p_n} \tag{13}$$

もし $\partial H/\partial p_1=f(q_1)$ が求積法に帰せしめられた最初の方程式であるならば，そして又後続の方程式についても同様であれば，一般に解を得るために微分方程式全体を連立させて解かねばならない。もしハミルトニアンに加えて他の運動定数が存在するならば，数個の連立方程式が減じられる。

中心力場の中を運動している粒子の例をあげて説明しよう。

r と θ の円筒座標において，ハミルトニアンは簡単に

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r{}^2+\frac{p_\theta{}^2}{r^2}\right)+U(r) \tag{14}$$

と書ける。ここで $p_r=m\dot{r}$　$p_\theta=mr^2\dot{\theta}$ で，m は粒子の質量で U は中心力 $F=-\dfrac{\partial U}{\partial r}$ に対応するポテンシャルである。系は保存力場であるので，$H=H_0$ は定数である。(13) の型において，運動方程式は次のようになる

$$dt=\frac{d\theta}{\partial H/\partial p_\theta}=\frac{dr}{\partial H/\partial p_r}$$

ハミルトニアンを偏微分して p_r を消去すると

$$dt=\frac{d\theta}{p_\theta/mr^2}=\frac{dr}{\dfrac{1}{m}\left[2m(H_0-U(r))-\dfrac{p_\theta}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{15}$$

である。そして p_θ を２番目の運動定数と考えると，この方程式を解くことができる。

§３　位相空間における保存力

独立変数の関数としての道筋を知ることなしに力学問題のハミルトニアン公式化から粒子の運動について重要な情報が得られる。特に一自由度で時間に独立であるハミルトニアンの系に対して，(10)から我々は時間に独立な位置の関数として運動量を見い出す。p と q の初期値はエネルギーの初期値を決定する。そしてこれは，(10)においてハミルトニアン $H(p_0,\ q_0)$ に相当する。

簡単な非線型バネの例をあげて説明しよう。運動方程式が(4)の形で与えられるとしよう

$$\dot{p}=-(\alpha q+\beta q^3)$$
$$\dot{q}=\frac{p}{m} \tag{16}$$

ここで(4)の $G(t)$ は定数であり，質量の逆数である。そして力は時間に独立である。(7)のように積分を実行すると，(10)に対する時間に独立なハミルトニアンを次のように得る

$$\frac{p^2}{2m}+\left[\frac{\alpha q^2}{2}+\frac{\beta q^4}{4}\right]=H(p_0,\ q_0)$$

Fig. 3 において，ポテンシャル U と対応する 2，3 のハミルトニアンの初期値を位相平面でプロットしてみた。ハミルトニアンの初期値は全エネルギーすなわち運動エネルギープラスポテンシャルエネルギーである。もし H が U の最大値よりも大きいと，p は常にゼロではなく，H_U に対応する束縛されない運動が右から左への運動となる。ポテンシャルの井戸の中の初期振動に対して，初期の全エネルギー H_S と H_L はそれぞれ安定運動と安定運動の極限に対応する。振動の周期が無限大になる極限の軌道はセパラトリックス(separatrix)として知られている。

単一自由度を持つ系に対して振動する粒子の軌跡によって閉じられる位相空間領域は次のように得られる

$$J=\oint p\,dq \tag{17}$$

ハミルトニアンの与えられた値に対する q のすべての値での粒子の集合は閉じられた位相空間を一意的に境界する。もし我々がハミルトニアンが時間とともに変化することを受け入れるならば，この粒子の集合によって境界された位相領域はリュービューの理論の効力によって定数となる。いかなる単一粒子もハミルトニアン曲線にそって振動し，一般的にハミルトニアンの中での変化の前にそれが閉じた領域とは異なる領域を閉じる。しかしもし粒子のハミルトニア

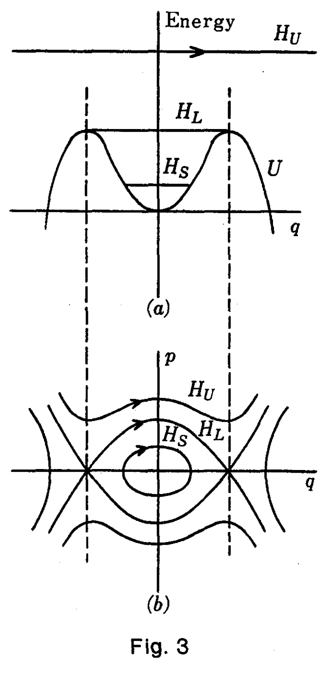

Fig. 3

ンが十分に遅い割合で変化するならば，(17)の表現は又作用積分として知られているが，近似的に定数になることが示される。この理論を証明する一つの方法は，それとリュービューの理論の間の関係を含む。ハミルトニアンが初期的に定数になる系を考える。そしてある周期の間変化し，そして最後に再び定数になる。初期的に，振動系に対する定数ハミルトニアンの曲線は閉じられた位相空間を定義する。もしパラメーターの変化ののちに，定数ハミルトニアンの初期曲線は定数ハミルトニアンの新しい曲線へと変化するならば，振動によって閉じられた領域は保存される。この結果は，位相空間の点が一意的に位相空間軌跡を定義することを思い出すときただちにあきらかになる。位相空間における境界を位相点が横切ることは出来ない。なぜなら境界に到達したいかなる点も境界点と同じ後続の軌跡を見出すからである。もし初期と最終軌道が同じ位相空間点によって構成されるならば，リュービューの理論が初期軌道によって閉じられた領域は保存されるということを要求するので，初期と最終軌道によって閉じられた領域は同じであり，それ故保存される。断熱理論を証明するには，初期領域における定数ハミルトニアンの曲線上にあるすべての粒子は最終領域の定数ハミルトニアン曲線上に残るということを証明すれば十分である。

調和振動子の例で，単一自由度に対する位相空間領域の断熱保存の利用を説明しよう。この例は大変重要である。なぜなら一次元振動子は一般的に小振幅線型領域を持つからである。我々はまず第一に定数パラメーター w を持つ調和振動子の方程式を考えよう

$$\ddot{q}+w^2q=0$$

この解は

$$q=q_0\sin(wt+\delta) \qquad (18)$$

である。位相領域又は作用積分はそこで

$$J=m\,w\,q_0{}^2\int_0^{2\pi}\cos^2(wt+\delta)d(wt)=\pi m\,w\,q_0{}^2=\frac{2\pi E}{w} \qquad (19)$$

ここで E は振動子の全エネルギーである。もし w が $w=w_1$ の系から $w=w_2$ の第2の系へ変化すると考えるならば，そして断熱論から J が定数であると考えるならば，振幅の変化と振動のエネルギーは次のようになる

$$\frac{q_{02}}{q_{01}}=\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{E_2}{E_1}=\frac{w_2}{w_1}$$

§4　多次元系に対する位相空間

もし系が単一自由度以上の自由度を持つならば，運動に対する解は変数が分離され，ハミルトニアンが定数であるときにのみ見出される。この場合，それぞれの自由度はそれ自身の位相平面の範囲内における分離的な運動によって表現され，それに対応して変数は求積法に帰せられる。ある座標系で変数が分離的であるための条件はそれぞれの自由度に対して運動定数が存在することである。単一自由度の場合の定数は，ハミルトニアンそれ自身である。2つの自由度がある場合の2番目の定数の意味について研究しよう。

§1で取りあつかった中心力について考えてみよう。2自由度を持つハミルトニアンは直角座

標で次のように書かれる

$$H=\frac{1}{2m}(p_x{}^2+p_y{}^2)+U(\sqrt{x^2+y^2}) \tag{20}$$

又円筒座標で書くと，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ で

$$H=\frac{1}{2m}(p_r{}^2+\frac{p_\theta{}^2}{r^2})+U(r) \tag{14}$$

を得る。ここで $p_\theta{}^2=l^2$ として，直角座標と円筒座標の関係

$$mr^2\dot{\theta}=m(x\dot{y}-y\dot{x})=l=xp_y-yp_x \tag{21}$$

を使うと，(21)から p_y を p_x で表わすことが出来るので，これを(20)に代入すると自由度を1つ減じることが出来て，単一自由度ハミルトニアンを得る。このように運動定数をふさわしい座標系を選んで定めて，多自由度を持つハミルトニアンにおいて，測定しやすい変数のみを残すように変形することが出来る。

参考文献

H. GOLDSTEIN 著「古典力学」（物理学叢書11）吉岡書店

原稿受理　1983年11月30日